

Раздел № 03 Введение в математический анализ

Тема № 05 Множества и функции

Лекция № 13 Последовательности и функции

Учебные вопросы:

1. Числовые последовательности
2. Простейшие свойства последовательностей
3. Функции и её основные характеристики
4. Основные элементарные функции

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 1. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Числовые последовательности.

Понятие числовой последовательности $\{x_n\}$. Способы задания:

$x_n = f(n)$ – явный и $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots)$ – рекуррентный, $n = 1, 2, 3, \dots$

Примеры явного задания: $\{n\}$, $\{n^2\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\{(-1)^{n-1}\}$, $\{c\}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Примеры рекуррентного задания: $x_{n+1} = n + x_n$, $x_1 = 0$;

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n \geq 2$, $x_1 = 1, x_2 = 1$ (последовательность Фибоначчи).

Арифметическая прогрессия: $\{a_n\}$, $a_{n+1} = a_n + d \Leftrightarrow a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (1)$$

Геометрическая прогрессия: $\{b_n\}$, $b_{n+1}=b_n \cdot q \Leftrightarrow b_n=b_1 \cdot q^{n-1}$.

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q \neq 1) \quad (2)$$

2. Простейшие свойства последовательностей.

Монотонность. $\{x_n\} \nearrow -\text{возрастающая (строго возрастающая)} \Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n$
 $\{x_n\} \searrow -\text{убывающая (строго убывающая)} \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n$
 $n \in N. \quad \{x_n\} \nearrow -\text{возрастающая (строго возрастающая)} \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$
 $\{x_n\} \searrow -\text{убывающая (строго убывающая)} \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$
 $n \in N.$

$\{x_n\} -\text{монотонная (строго монотонная), если } \{x_n\} -\text{возрастающая (строго возрастающая) или убывающая (строго убывающая). Примеры: } \{n^2\} -\text{строго } \nearrow, \left\{\frac{1}{n}\right\} -\text{строго } \searrow, \{(-1)^{n-1}\} -\text{не является монотонной.}$

Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ является строго возрастающей при $d > 0$ и строго убывающей при $d < 0$. Монотонность геометрической прогрессии $\{b_n\}$ определяется следующими условиями:

1. $b_1 > 0; q > 1 \Rightarrow \{b_n\} \nearrow, 0 < q < 1 \Rightarrow \{b_n\} \searrow, q < 0 \Rightarrow \{b_n\} -\text{не монотонна.}$
2. $b_1 < 0; q > 1 \Rightarrow \{b_n\} \searrow, 0 < q < 1 \Rightarrow \{b_n\} \nearrow, q < 0 \Rightarrow \{b_n\} -\text{не монотонна.}$

Ограниченность.

$$\{x_n\} -\text{ограничена сверху} \Leftrightarrow \exists M \in R: x_n \leq M \quad \forall n \in N;$$

$$\{x_n\} -\text{ограничена снизу} \Leftrightarrow \exists m \in R: x_n \geq m \quad \forall n \in N;$$

$$\{x_n\} -\text{ограничена} \Leftrightarrow \exists m, M \in R: m \leq x_n \leq M \quad \forall n \in N;$$

$$\{x_n\} -\text{ограничена} \Leftrightarrow \exists M > 0: |x_n| \leq M \quad n \in N;$$

$$\{x_n\} -\text{не ограничена} \Leftrightarrow M > 0 \exists n \in N: |x_n| > M.$$

Примеры ограниченных последовательностей:

- 1) $\left\{\frac{3}{n^2}\right\} \quad (0 < x_n \leq 3 \quad n \in N);$
- 2) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \quad (|x_n| \leq 1 \quad n \in N);$
- 3) $\{5 \cdot (-1)^{n-1}\} \quad (|x_n| = 5 \leq 5 \quad n \in N);$
- 4) $\{\sin n\} \quad (|x_n| \leq 1 \quad n \in N).$

Примеры неограниченных последовательностей:

- 1) $\{0; 1; 0; 2; 0; 3; 0; 4; 0; 5; \dots\} \quad (x_{2n} = n; x_{2n+1} = 0);$
- 2) $\{n^p\}, \quad (p > 0, p - \text{фиксированное число});$

3) $\{q^n\}$, ($|q| > 1, q$ - фиксированное число).

Последовательность:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3)$$

$$\{x_n\} = \left\{2; 2\frac{1}{4}; 2\frac{10}{27}; 2\frac{113}{256}; 2\frac{1526}{3125}; \dots\right\} = [2; 2,25; 2,37\dots; 2,44\dots; 2,48\dots].$$

Свойства: $\{x_n\}$ — строго $\nearrow$ и ограничена ($2 \leq x_n < 3 \quad n \in \mathbb{N}$).

3. Функции и её основные характеристики.

Понятие функции. Независимая переменная x (аргумент) и зависимая переменная y (функция), область определения D_f и область значений E_f , график функции Γ_f . Способы задания функции: табличный, графический, аналитический, алгоритмический и т. д. Аналитический способ задания:

— явная форма записи: $y = f(x)$ или:

$$y = \begin{cases} f_1(x), x \in X_1 \\ \dots \\ f_k(x), x \in X_k \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k; \\ X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j \end{cases};$$

— неявная форма записи: $F(x, y) = 0$ ($y = y(x)$ — неявная функция);

— параметрическая форма записи: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Простейшие примеры функций:

$y = c$ — постоянная, $y = ax + b, (a \neq 0)$ — линейная, $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (c \neq 0)$

— дробно-линейная, $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ — квадратичная,

$y = [x]$ — целая часть числа, $y = \{x\}$ — дробная часть числа,

$y = \text{sign } x$ — знак числа, $y = D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ — функция Дирихле.

Основные характеристики функции: четность и нечетность, монотонность, ограниченность, периодичность.

Четность и нечетность. Пусть D_f — симметрична относительно точки O , т. е. если $x \in D_f$, то и $-x \in D_f$. Функция $f(x)$ — четная, если $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$; функция $f(x)$ — нечетная, если $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$.

График четной функции симметричен относительно оси OY ; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Монотонность. Пусть $X \subset D_f$. Функция $f(x)$ — возрастающая на множестве X , если $\forall x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ и называется строго возрастающей на множестве X , если $\forall x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Обозначение: $f(x) \nearrow$ (или строго $\nearrow$) на множестве X .

Функция $f(x)$ — убывающая на множестве X , если $\forall x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ и называется строго убывающей на множестве X , если $\forall x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Обозначение: $f(x) \searrow$ (или строго $\searrow$) на X .

Функция $y=f(x)$ — монотонная (строго монотонная) на множестве X , если она возрастающая (строго возрастающая) или убывающая (строго убывающая) на множестве X .

Ограниченность. Пусть $X \subset D_f$. Функция $f(x)$ — ограничена сверху на множестве X , если $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \forall x \in X$. Функция $f(x)$ — ограничена снизу на множестве X , если $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m \forall x \in X$.

Функция $f(x)$ — ограничена на множестве X , если $\exists m, M \in \mathbb{R} :$
 $m \leq f(x) \leq M \forall x \in X$.

$f(x)$ — ограничена на $X \Leftrightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \forall x \in X$;

$f(x)$ — не ограничена на $X \Leftrightarrow M > 0 \exists x \in X : |f(x)| > M$.

Периодичность. Функция $y=f(x)$ — периодическая, если $\exists T > 0 : x \pm T \in D_f \forall x \in D_f$ и $f(x \pm T) = f(x)$. Число T — период функции.

Если T — период функции, то $k \cdot T$, где $k \in \mathbb{N}$ — также период этой функции. В дальнейшем под периодом функции подразумевается наименьший положительный период функции.

Понятие обратной функции. Графики взаимно-обратных функций.

4. Основные элементарные функции.

К основным элементарным функциям относятся:

1) постоянная функция: $y=C$, $C=const$;

- 2) степенная функция: $y = x^\alpha$, $\alpha = \text{const}$;
- 3) показательная функция: $y = a^x$, $a = \text{const}$, $a > 0, a \neq 1$;
- 4) логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a = \text{const}$, $a > 0, a \neq 1$;
- 5) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
- 6) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

Свойства и графики основных элементарных функций.

Сложная функция (суперпозиция функций). Понятие элементарной функции: $y = f(x)$ – элементарная, если она получена из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиций этих функций.

Классы элементарных функций: многочлены, рациональные функции, алгебраические функции, трансцендентные функции.

Примеры неэлементарных функций: $y = \operatorname{sign} x$ (знак числа),
 $y = [x]$ (целая часть числа), $y = \{x\}$ (дробная часть числа), $y = D(x)$ (функция Дирихле), функции вида: $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1 \\ f_2(x), & x \in X_2 \end{cases}$, где $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Разработал доцент

кафедры высшей математики

А. П. Потапов