

Раздел № 03 **Введение в математический анализ**

Тема № 06 **Пределы и непрерывность**

Лекция № 14 **Предел последовательности**

Учебные вопросы:

- 1. Понятие предела последовательности**
- 2. Бесконечно малые величины**
- 3. Бесконечно большие величины**
- 4. Достаточные условия существования предела последовательности**

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 1. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Понятие предела последовательности.

Определение предела числовой последовательности $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \left\{ \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon \text{ } n > n_\varepsilon \right\} \quad (1)$$

Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Примеры.

Геометрический смысл предела последовательности. Предел постоянной величины $\{c\}$. Отсутствие предела последовательности $\{(-1)^n\}$. Единственность предела. Простейшие свойства пределов. Ограниченность сходящейся последовательности.

2. Бесконечно малые величины.

Понятие бесконечно малой величины (б.м.в.):

$$\{x_n\} - \text{б.м.в.} \Leftrightarrow \lim x_n = 0, \text{ или:}$$

$$\{x_n\} - \text{б.м.в.} \Leftrightarrow \left\{ \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n| < \varepsilon \ n > n_\varepsilon \right\}. \text{ Примеры б.м.в.:}$$

$$\left\{ \frac{1}{n^p} \right\}, \left\{ \frac{(-1)^n}{n^p} \right\} \text{ при } p > 0, \{q^n\} \text{ при } |q| < 1 \ (p, q - \text{фиксированные числа}).$$

Критерий сходимости последовательности:

$$\exists \lim x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \{\alpha_n\} - \text{б.м.в.} \quad (2)$$

Свойства бесконечно малых величин:

– Сумма конечного числа б.м.в. есть б.м.в.

– Произведение б.м.в. на ограниченную величину есть б.м.в.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Арифметические операции над сходящимися последовательностями.

$$\lim x_n = a, \lim y_n = b \Rightarrow \lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n = a \pm b;$$

$$\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n = a \cdot b; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b} \text{ (при } b \neq 0 \text{)}.$$

3. Бесконечно большие величины.

Понятие бесконечно большой величины (б.б.в.):

$$\{x_n\} - \text{б.б.в.} \Leftrightarrow \lim x_n = \infty \Leftrightarrow \left\{ M > 0 \exists n_M \in \mathbb{N} : |x_n| > M \ n > n_M \right\}.$$

Примеры б.б.в.:

$$\{n^p\}, \{(-1)^n n^p\} \text{ при } p > 0, \{q^n\} \text{ при } |q| > 1 \ (p, q - \text{фиксированные числа}).$$

$$\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \left\{ M > 0 \exists n_M \in \mathbb{N} : x_n > M \ n > n_M \right\};$$

$$\lim x_n = -\infty \Leftrightarrow \left\{ M > 0 \exists n_M \in \mathbb{N} : x_n < -M \ n > n_M \right\}.$$

Замечание: понятие бесконечно большой величины не тождественно

понятию неограниченной величины. Например: последовательность

$\{0; 1; 0; 2; 0; 3; 0; 4; 0; 5; \dots\}$ – неограниченная величина, но не бесконечно

большая величина. Связь между б.м.в. и б.б.в.:

$$\{x_n\} - \text{б.б.в.} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{x_n} \right\} - \text{б.м.в.}; \quad \{x_n\} - \text{б.м.в.} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{x_n} \right\} - \text{б.б.в.}$$

Арифметические операции над бесконечно большими величинами:

$$1) x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow +\infty \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty;$$

- 2) $x_n \rightarrow -\infty, y_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$;
- 3) $x_n \rightarrow +\infty, \{y_n\}$ - ограничена $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$;
- 4) $x_n \rightarrow -\infty, \{y_n\}$ - ограничена $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$;
- 5) $x_n \rightarrow \infty, \{y_n\}$ - ограничена $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow \infty$;
- 6) $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \cdot y_n \rightarrow \infty$;
- 7) $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow a, (a \neq 0) \Rightarrow x_n \cdot y_n \rightarrow \infty$.

Типы неопределенностей (неопределенных выражений), возникающие при арифметических действиях с последовательностями:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty].$$

Предел многочлена и предел отношения многочленов (при $n \rightarrow +\infty$)

4. Достаточные условия существования предела последовательности.

Свойства пределов, связанные с неравенствами. Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой переменной. Примеры. Сходимость монотонной ограниченной последовательности.

– $\hookrightarrow$ Возрастающая и ограниченная сверху последовательность

сходится:

$$\{x_n\} \nearrow \text{ и } \exists M \in \mathbb{R}: x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \lim \hookrightarrow x_n.$$

– $\hookrightarrow$ Убывающая и ограниченная снизу последовательность сходится:

$$\{x_n\} \searrow \text{ и } \exists m \in \mathbb{R}: x_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \lim \hookrightarrow x_n.$$

Сходимость последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Число e . Натуральный

логарифм: $\ln a = \log_e a$ и экспонента e^x . Лемма о вложенных промежутках.

Признак сходимости Больцано-Коши:

$$\{x_n\} - \hookrightarrow \text{сходится} \Leftrightarrow \left\{ \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \text{ и } m > n_\varepsilon \right\}.$$

Сходимость последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

Признак расходимости:

$$\{x_n\} - \hookrightarrow \text{расходится} \Leftrightarrow \left\{ \exists \varepsilon > 0 : n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 \text{ и } m > n_0 : |x_n - x_m| \geq \varepsilon \right\}.$$

Расходимость последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

**Разработал доцент
кафедры высшей математики**

А. П. Потапов