

Раздел № 03 **Введение в математический анализ**

Тема № 06 **Пределы и непрерывность**

Лекция № 15 **Предел функции**

Учебные вопросы:

1. Понятие предела функции
2. Бесконечно малые функции
3. Пределы элементарных функций

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 1. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Понятие предела функции.

Дана функция $y=f(x)$ с областью определения D_f . Пусть a — точка сгущения множества D_f . Различные определения предела функции в точке.

Определение 1 (по Коши или «на языке ε - δ »):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right] \quad (1)$$

Пример 1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 2) = 3$. Здесь $f(x) = 5x - 2, a = 1, A = 3$,

$$|f(x) - A| = |(5x - 2) - 3| = |5x - 5| = 5|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Следовательно, $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(\delta = \frac{\varepsilon}{5} \right): 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow$

$|f(x) - A| = 5|x-1| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$. Это и означает, что $\exists \lim_{x \rightarrow 1} (5x-2) = 3$.

Пример 2. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Здесь $f(x) = x^2, a = 0, A = 0$,

$|f(x) - A| = |x^2 - 0| = x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$. Следовательно,

$\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(\delta = \sqrt{\varepsilon} \right): 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow$

$|f(x) - A| = x^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$. Это и означает, что $\exists \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

Определение 2 (по Гейне или «на языке последовательностей»):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \left\{ [x_n] \subset D_f : x_n \rightarrow a, x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A \right\} \quad (2)$$

Геометрический смысл предела функции:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \left\{ \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(x) \in U_\varepsilon(A) \mid x \in D_f \cap U_\delta^0(a) \right\} \quad (3)$$

Односторонние пределы функции:

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0), \quad A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0).$$

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow [\exists f(a+0), \exists f(a-0), f(a+0) = f(a-0) = A]$. Примеры.

Предел функции на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \left\{ \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 : x \in D_f, x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \left\{ \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 : x \in D_f, x < -\Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \left\{ \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 : x \in D_f, |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right\} \quad (6)$$

Примеры:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \pi.$$

Отсутствие пределов: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x, \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x, \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Предел постоянной функции, предел сложной функции. Простейшие свойства пределов. Свойства пределов, связанные с неравенствами.

Предельный переход в неравенстве. Лемма о сжатой функции.

2. Бесконечно малые функции.

Понятие бесконечно малой функции – бесконечно малой величины (б.м.в.):

$$\begin{aligned} y(x) - \text{б.м.в. при } x \rightarrow a &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} y(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in D_y, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |y(x)| < \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогичные определения при $x \rightarrow a \pm 0, x \rightarrow \pm \infty$.

Например, $y(x) = \frac{1}{x^p}$, где $p > 0$ – б.м.в. при $x \rightarrow \infty$.

Критерий существования предела функции:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + y(x), \text{ где } y(x) - \text{б. м. в. при } x \rightarrow a \quad (8)$$

Аналогичные критерии при $x \rightarrow a \pm 0, x \rightarrow \pm \infty$.

Свойства бесконечно малых функций:

– Сумма конечного числа б.м.в. есть б.м.в.

– Произведение б.м.в. на ограниченную величину есть б.м.в.

Примеры: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Арифметические действия с пределами.

$$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B, C = \text{const} \Rightarrow$$

$$- \lim (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim f(x) = C \cdot A,$$

$$- \lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B,$$

$$- \lim (f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$- \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\text{при } B \neq 0).$$

3. Пределы элементарных функций.

Пределы основных элементарных функций в точке ($a \in D_f$).

1) постоянная функция:

$$y = C, C = \text{const} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} C = C;$$

2) степенная функция:

$$y = x^p, p = \text{const} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p;$$

3) показательная функция:

$$y = p^x, \quad p = \text{const}, \quad p > 0, p \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} p^x = p^a;$$

4) логарифмическая функция:

$$y = \log_p x, \quad p = \text{const}, \quad p > 0, p \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \log_p x = \log_p a;$$

5) тригонометрические функции:

$$y = \sin x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \quad y = \cos x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a,$$

$$y = \operatorname{tg} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a, \quad y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$$

6) обратные тригонометрические функции:

$$y = \arcsin x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \arcsin x = \arcsin a,$$

$$y = \arccos x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \arccos x = \arccos a,$$

$$y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a,$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} a$$

Теорема (о пределе элементарной функции).

Если $f(x)$ — элементарная функция и $a \in D_f$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Примеры на пределы многочленов, рациональных, иррациональных, тригонометрических, гиперболических, степенно-показательных и других трансцендентных функций в точке.

Разработал доцент

кафедры высшей математики

А. П. Потапов