

Раздел № 03 **Введение в математический анализ**

Тема № 06 **Пределы и непрерывность**

Лекция № 16 **Замечательные пределы**

Учебные вопросы:

1. Бесконечно большие функции
2. Замечательные пределы
3. Сравнение бесконечно малых величин
4. Эквивалентные бесконечно малые величины

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 1. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Бесконечно большие функции.

Понятие бесконечно большой функции или бесконечно большой величины (б.б.в.) в точке:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \left[M > 0 \exists \delta > 0 : x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M \right] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left[M > 0 \exists \delta > 0 : x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M \right] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [M > 0 \exists \delta > 0 : x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \leftarrow M] \quad (3)$$

Аналогичные определения б.б.в. при $x \rightarrow a \pm 0$ и при $x \rightarrow \pm \infty$.

Примеры: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \rightarrow +\infty$ ($p > 0$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ($a > 1$),

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, \text{ если } a > 1 \\ -\infty, \text{ если } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \text{ если } a > 1 \\ +\infty, \text{ если } 0 < a < 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x \rightarrow +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x \rightarrow -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{ctg} x \rightarrow +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{ctg} x \rightarrow -\infty.$$

Связь между б.б.в. и б.м.в.:

$$f(x) \rightarrow \text{б.б.в.} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \rightarrow \text{б.м.в.}, \quad f(x) \rightarrow \text{б.м.в.} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \rightarrow \text{б.б.в.}$$

Арифметические операции над бесконечно большими величинами:

- 1) $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$;
- 2) $f(x) \rightarrow -\infty, g(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) + g(x) \rightarrow -\infty$;
- 3) $f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow \text{ограничена} \Rightarrow f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$;
- 4) $f(x) \rightarrow -\infty, g(x) \rightarrow \text{ограничена} \Rightarrow f(x) + g(x) \rightarrow -\infty$;
- 5) $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \text{ограничена} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow \infty$;
- 6) $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow \infty$;
- 7) $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow a, (a \neq 0) \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow \infty$.

Предел многочлена и рациональной функции на ∞ .

2. Замечательные пределы.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4)$$

Следствия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e \quad (6)$$

Следствия:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. Сравнение бесконечно малых величин.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.в. при $x \rightarrow a(a \neq 0, \pm\infty)$, т. е.

$$\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0, \quad \beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C$, где $C \neq 0$ и $C \neq \infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются б.м.в.

одного порядка при $x \rightarrow a$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, то $\beta(x)$ называется б.м.в. более высокого порядка,

чем $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$. Обозначение: $\beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \rightarrow a$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ называется б.м.в. более низкого порядка, чем

$\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$. В этом случае: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow a$

Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = C$, где $C \neq 0$ и $C \neq \infty$, то $\beta(x)$ — называется бесконечно

малой k -го порядка по отношению к бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$.

Например, $\beta(x) = (1 - \cos x)^3$ — б.м.в. 6-го порядка по отношению к $\alpha(x) = x$ при $x \rightarrow 0$, т. к.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha^6(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не существует, то б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются

несравнимыми при $x \rightarrow a$.

Например, $\beta(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\alpha(x) = x$ — несравнимы при $x \rightarrow 0$, т. к.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ — не существует. Аналогичные определения есть и для

бесконечно больших величин (б.б.в.).

Например, многочлены $Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n$

и $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ – б.б.в. одного порядка

при $x \rightarrow \infty$, т. к. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0}{a_0}$.

Простейшие свойства символа o .

Если $\alpha = o(\alpha(x))$ – б.м.в. при $x \rightarrow a(a \neq 0, \pm\infty)$, то справедливы следующие свойства:

- 1) $o(\alpha) \pm o(\alpha) = o(\alpha)$;
- 2) $o(C \cdot \alpha) = C \cdot o(\alpha) = o(\alpha) \quad \forall C = \text{const} \neq 0$;
- 3) $(o(\alpha))^n = o(\alpha^n), \alpha^n \cdot o(\alpha) = o(\alpha^{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- 4) $\beta = o(\alpha^n), n > 1 \Rightarrow \beta = o(\alpha^{n-1})$.

4. Эквивалентные бесконечно малые величины.

Б.м.в. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x \rightarrow a$ ($a \neq 0, \pm\infty$), если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$.

Эквивалентные б.м.в. являются частным случаем бесконечно малых одного порядка ($C=1$). Из замечательных пределов получаем примеры простейших эквивалентных б.м.в.:

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \operatorname{tg} x \sim x \\ \arcsin x \sim x \\ \operatorname{arctg} x \sim x \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} \cdot x^2 \\ e^x - 1 \sim x \\ a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \\ \ln(1+x) \sim x \\ \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \\ (1+x)^p - 1 \sim p \cdot x \end{array} \right\} \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Свойства эквивалентных б.м.в.:

- Рефлексивность: $\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
- Симметричность: $\alpha(x) \sim \beta(x) \Rightarrow \beta(x) \sim \alpha(x)$;

– $\color{red}{\hookrightarrow}$ Транзитивность: $\alpha(x) \quad \beta(x), \beta(x) \gamma(x) \Rightarrow \alpha(x) \quad \gamma(x).$

Теорема 1. Если $\alpha(x) \sim \tilde{\alpha}(x)$ и $\beta(x) \sim \tilde{\beta}(x)$ при $x \rightarrow a$, то $\lim_{x \rightarrow a} \color{red}{\hookrightarrow} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \color{red}{\hookrightarrow} \lim_{x \rightarrow a} \color{red}{\hookrightarrow} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}.$

Главная часть бесконечно малой функции.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – $\color{red}{\hookrightarrow}$ б.м.в. при $x \rightarrow a(a \neq 0, \pm\infty)$; тогда $\alpha(x)$ называется главной частью $\beta(x)$, если $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$ при $x \rightarrow a(a \neq 0, \pm\infty).$

Теорема 2. $\{\alpha(x) \text{ — главная часть } \beta(x)\} \Leftrightarrow \{\alpha(x) \sim \beta(x)\}.$

Например, $\sin x = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$.

Замечание. Для бесконечно больших функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \rightarrow a(a \neq 0, \pm\infty)$: $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$ – $\color{red}{\hookrightarrow}$ также вводятся понятия эквивалентности и главной части:

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \rightarrow a \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \color{red}{\hookrightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} \color{red}{\hookrightarrow} 1.$$

Например, многочлен $P_n(x) = \color{red}{\hookrightarrow} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ и его первый член $a_0 x^n$ – $\color{red}{\hookrightarrow}$ б.б.в. при $x \rightarrow \infty$; при этом $P_n(x) \sim a_0 x^n$ при $x \rightarrow \infty$.

Следовательно, первый член $a_0 x^n$ многочлена $P_n(x)$ является его главной частью при $x \rightarrow \infty$, т. е. $P_n(x) = \color{red}{\hookrightarrow} a_0 x^n + o(x^n)$ при $x \rightarrow \infty$.

Раскрытие неопределенностей типа: $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty], [1^\infty].$

Существование предела монотонной ограниченной функции. Общий признак существования предела функции (признак **Больцано-Коши**).

Разработал доцент

кафедры высшей математики

А. П. Потапов