

Раздел № 03 **Введение в математический анализ**

Тема № 06 **Пределы и непрерывность**

Лекция № 17 **Непрерывность функции**

Учебные вопросы:

1. Понятие непрерывности функции в точке
2. Классификация точек разрыва
3. Свойства функций, непрерывных в точке
4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 1. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Понятие непрерывности функции в точке.

Дана функция $f(x)$ с областью определения D_f . Пусть x_0 – точка сгущения множества D_f и $x_0 \in D_f$. Сформулируем 5 различных, но равносильных определений непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 .

1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Это означает, что для непрерывной функции в данной точке знак функции и знак предела можно переставлять местами: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$.

2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (2)$$

Здесь использовано определение предела функции «на языке ε - δ ».

3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\forall \{x_n\} \subset D_f: x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad (3)$$

Здесь использовано определение предела функции «на языке последовательностей».

В отличие от определений пределов здесь нет условий $x \neq x_0$ или $x_n \neq x_0$.

Для следующего определения непрерывности введем понятия приращения аргумента Δx и приращения функции Δy . Для $x \in D_f$:

$$\Delta x = x - x_0 \quad (4)$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (5)$$

4. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (т.е. \Delta y \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0) \quad (6)$$

Это означает, что для непрерывной функции в данной точке бесконечно малым приращениям аргумента соответствуют бесконечно малые приращения функции.

5. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\exists f(x_0 - 0), \exists f(x_0 + 0) \text{ и } f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (7)$$

Здесь использовано необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке, означающее равенство односторонних пределов.

Если функция не является непрерывной в точке, то она называется разрывной в этой точке, при этом точка называется точкой разрыва функции.

Если $\exists f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева в точке x_0 ; если $\exists f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа в точке x_0 .

Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве $X \subset D_f$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если $X = [a, b]$ - замкнутый промежуток, то непрерывность на $[a, b]$

означает непрерывность в каждой внутренней точке этого промежутка, а на концах промежутка — соответственно непрерывность справа (в точке a) и непрерывность слева (в точке b).

Теорема (о непрерывности элементарных функций).

Если $f(x)$ — элементарная функция и $x_0 \in D_f$, то $f(x)$ — непрерывна в точке x_0 .

2. Классификация точек разрыва.

Пусть x_0 — точка разрыва функции $f(x)$. Существуют три типа точек разрыва:

- 1) точка устранимого разрыва;
- 2) точка разрыва 1-го рода;
- 3) точка разрыва 2-го рода.

1). Точка x_0 является точкой устранимого разрыва, если $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Например, для $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ — точка $x_0 = 0$ является точкой

устранимого разрыва, т. к. $f(x_0) = f(0) = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0).$$

2). Точка x_0 является точкой разрыва 1-го рода, если $\exists f(x_0 - 0)$, $\exists f(x_0 + 0)$, но

$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. При этом разность $\Delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ — это скачок функции

$f(x)$ в точке x_0 .

Пример 1. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$, A —

любое число. Здесь $x_0 = 0$ является

точкой разрыва 1 рода, т. к.

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0 + 0} 1 = 1,$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow 0 - 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0 - 0} -1 = -1,$$

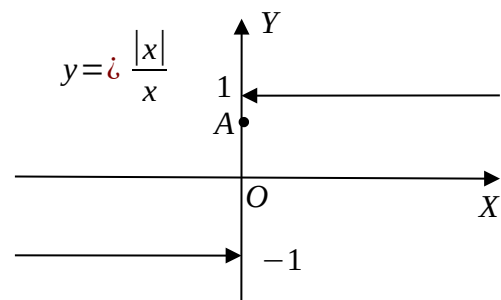


Рис. 1. График функции из Примера 1.

$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$; $\Delta = f(x_0+0) - f(x_0-0) = 2$ – скачок функции в точке x_0 (Рис. 1).

3). Точка x_0 является точкой разрыва 2-го рода, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует, т. е. не существует (или равен ∞) хотя бы один из пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$.

Пример 2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$, A – любое число.

Здесь $x_0 = 0$ является точкой разрыва 2 рода,

т. к. $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$,

$f(x_0+0) = f(0+0) = \infty$ (Рис. 2).

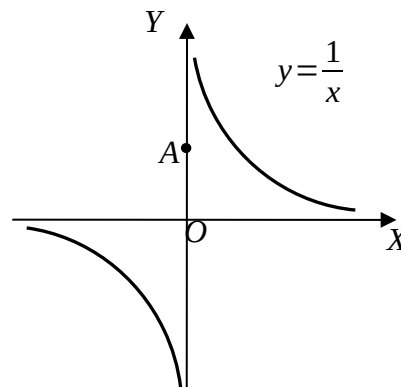


Рис. 2. График функции из Примера 2.

Замечание. Пусть x_0 – точка разрыва $f(x)$.

Если при этом $f(x_0-0) = f(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0 ; если $f(x_0+0) = f(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$

непрерывна справа в точке x_0 .

3. Свойства функций, непрерывных в точке.

1. Арифметические операции над непрерывными функциями.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны в точке x_0 , то в этой точке непрерывны также их сумма и разность $f(x) \pm g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при условии, что в случае частного $g(x_0) \neq 0$).

2. Об ограниченности непрерывной функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то она ограничена в некоторой окрестности точки x_0 , т. е. $\exists U(x_0)$, $\exists M > 0$:
 $|f(x)| \leq M \quad x \in U(x_0)$.

3. О сохранении знака непрерывной функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то и в некоторой окрестности точки x_0 значения $f(x) \neq 0$ и имеют такой же знак, какой у значения $f(x_0)$:

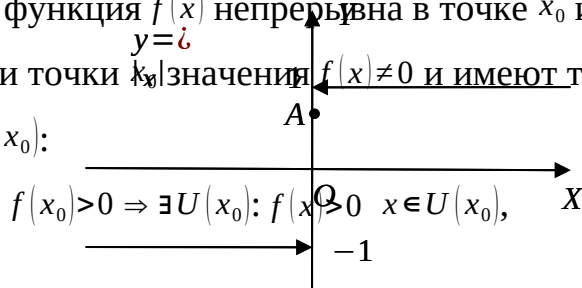


Рис. 6.1. К примеру 6.1

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists U(x_0): f(x) < 0 \quad x \in U(x_0).$$

4. О непрерывности сложной функции.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теоремы Больцано-Коши и Вейерштрасса

1-я теорема Больцано-Коши (об обращении функции в ноль).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если на концах промежутка она принимает значения разных знаков, то найдется точка внутри этого промежутка, в которой функция обращается в ноль:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b): f(c) = 0.$$

2-я теорема Больцано-Коши (о промежуточных значениях функции).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если на концах промежутка она принимает неравные значения: $f(a) \neq f(b)$, то функция принимает и все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$:

$$\forall \mu: f(a) < \mu < f(b) \quad (\text{или } f(b) < \mu < f(a)) \quad \exists c \in (a, b): f(c) = \mu.$$

1-я теорема Вейерштрасса (об ограниченности функции).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е. $\exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$.

2-я теорема Вейерштрасса (о наибольшем и наименьшем значении функции).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает в этом промежутке своего наибольшего M и своего наименьшего m значений:

$$\exists x_1, x_2 \in [a; b]: f(x_1) = M, \quad f(x_2) = m.$$

Понятие равномерной непрерывности функции на промежутке.

Разработал доцент

кафедры высшей математики

А. П. Потапов