

Раздел № 04 **Дифференциальное исчисление функций
одной переменной**

Тема № 07 **Дифференцируемость функции**

Лекция № 19 **Основные теоремы дифференциального исчисления**

Учебные вопросы:

- 1. Методы дифференцирования функций**
- 2. Основные теоремы дифференциального исчисления**
- 3. Производные высших порядков**

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов.
В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа,
2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное
исчисление функций одной переменной. Часть 2. Учебник и практикум для
академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Методы дифференцирования функций.

Дифференцирование неявных функций. Дифференцирование
параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.
Примеры.

2. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Понятие экстремума функции.

Теорема Ферма. Если в точке экстремума функция дифференцируема, то её
производная в этой точке равна нулю:

$$\begin{cases} x_0 - \text{т. экстремума} \\ f(x) - \text{дифференцируема в точке } x_0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad (1)$$

Геометрический смысл (Рис.1): если в точке экстремума касательная к графику существует, то она параллельна оси OX .

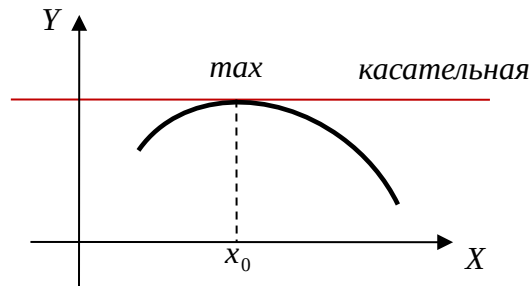


Рис 1. Геометрический смысл теоремы Ферма

Теорема Ролля о корнях производной.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и непрерывна в точках a и b . Если на концах промежутка функция принимает равные значения, то внутри интервала $(a; b)$ найдется такая точка, в которой производная равна нулю:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a; b): f'(c) = 0 \quad (2)$$

Геометрический смысл (Рис.2): если ординаты точек графика функции $f(x)$ на концах отрезка равны, то на этом графике найдется точка, касательная в которой к графику функции параллельна оси OX .

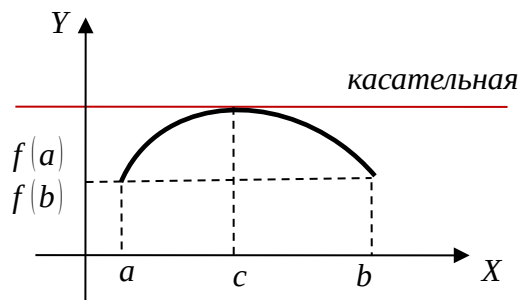


Рис 2. Геометрический смысл теоремы Ролля

Теорема Лагранжа о конечных приращениях.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и непрерывна в точках a и b . Тогда $\exists c \in (a; b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) \quad (3)$$

Геометрический смысл (Рис.3): на графике функции найдется точка, в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей концы графика, т. е.:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \varphi \quad (4)$$

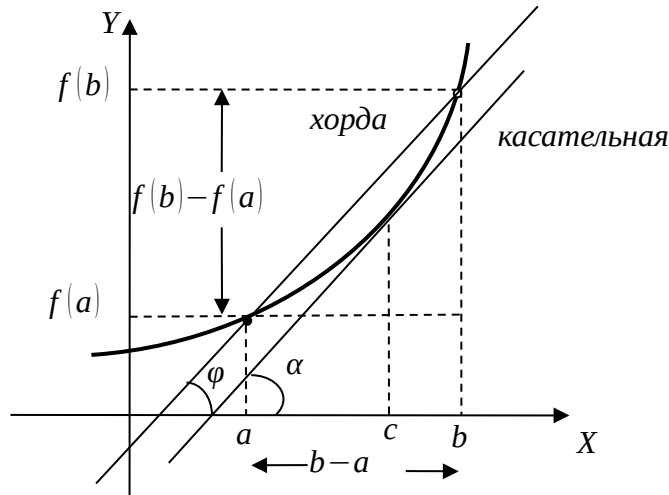


Рис 3. Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a; b)$ и непрерывны в точках a и b . Пусть $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Тогда $\exists c \in (a; b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (5)$$

Раскрытие неопределенностей типа $\left[\frac{0}{0} \right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (6)$$

Примеры.

3. Производные высших порядков.

Производные 2-го, 3-го, ..., n -го порядка: $f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

$$f''(x) = (f'(x))', \quad f'''(x) = (f''(x))', \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \quad (7) \text{ Примеры.}$$

Производные n -го порядка функций: e^x , $e^{\lambda x}$, x^p , $(1+x)^p$, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$.

Свойства производных высших порядков.

Формула Лейбница:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (8)$$

Здесь $u = u(x)$, $v = v(x)$, $u^{(0)} = u$, $u^{(1)} = u'$, $u^{(2)} = u''$ и т. д., аналогично для функции v . Производные высших порядков неявных и параметрически заданных функций.

Дифференциалы высших порядков: $d^2 y$, $d^3 y$, $\dots$, $d^n y$.

$$d^2 y = d(dy), \quad d^3 y = d(d^2 y), \quad \dots, \quad d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (9)$$

Вычисление дифференциалов высших порядков:

$$dy = y' \cdot dx, \quad d^2 y = y'' \cdot (dx)^2, \quad d^3 y = y''' \cdot (dx)^3, \dots, \quad d^n y = y^{(n)} \cdot (dx)^n \quad (10)$$

Разработал доцент

кафедры высшей математики

А. П. Потапов