Раздел № **04** **Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

Тема № **07** **Дифференцируемость функции**

Лекция № **20** **Формула Тейлора**

Учебные вопросы:

1. **Формула Тейлора для многочлена**
2. **Формула Тейлора для произвольной функции**
3. **Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена**
4. **Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 2. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

ТЕКСТ

1. Формула Тейлора для многочлена.

Разложение многочлена $P(x)=$¿ $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$ по степеням двучлена $(x-x_0)$:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}x^k \qquad (1)$$

Примеры. Формула **Маклорена**. Вывод формулы бинома **Ньютона**:

$$(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}x^k, \text{ где } C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad (2)$$

2. Формула Тейлора для произвольной функции.

Постановка задачи. Многочлен **Тейлора** функции $f(x)$ в точке x_0.

Формула **Тейлора** с остаточным членом в форме **Пеано**:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^{k}+R(x), \tag{3}$$

где $R(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ при $x\to x_0$.

<u>Пример</u> 1. $f(x)=x^x,\ x_0=1,\ n=3.$

$f(x_0)=¿\ 1;\ f'(x)=¿\ x^x\cdot(1+\ln x)\Rightarrow f'(x_0)=1;$

$f''(x)=x^x\cdot\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)\ \Rightarrow\ f''(x_0)=2;$

$f'''(x)=¿\ x^x\cdot\left((1+\ln x)^3+3(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\ \Rightarrow f'''(x_0)=3.$

$f(x)=1+(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2+\frac{3}{3!}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right).$

<u>Ответ</u>:

$$x^x=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right),\ \ x\to 1 \tag{4}$$

Формула **Маклорена**:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}+R(x), \tag{5}$$

где $R(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$.

Запись формулы **Тейлора** с использованием дифференциалов:

$$\Delta f(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k f(x_0)}{k!}+o\left((\Delta x)^n\right), \tag{6}$$

где $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ – приращение функции в точке x_0.

3. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n),\ \ x\to 0 \tag{7}$$

$$\sin x=¿\ x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n}),\ x\to 0 \tag{8}$$

$$\cos x=¿\ 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1}),\ x\to 0 \tag{9}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}x^n+o(x^n),\ x\to 0 \qquad (10)$$

$$(1+x)^p=1+\frac{p}{1!}x+\frac{p\cdot(p-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),\ x\to 0 \qquad (11)$$

4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^{k}+R_n(x),\quad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (12)$$

$R_n(x)$– остаточный член в форме **Лагранжа**, $x_0\leqslant c\leqslant x$.

Формула **Маклорена** с остаточным членом в форме **Лагранжа**:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}+R_n(x),\quad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},0\leqslant c\leqslant x \qquad (13)$$

Приближенные вычисления по формуле **Тейлора** с заданной точностью ε.

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^{k},\quad |R_n(x)|\le\varepsilon \qquad (14)$$

<u>Пример</u> 2. Вычислить приближенное значение $0{,}9^{0{,}9}$ с точностью до ε $\text{¿}\,0{,}001$.

Здесь $f(x)=x^x$, $x_0=1, x=0{,}9\ \Rightarrow\ |x-x_0|=0{,}1$.

$$f'(x)=x^x\cdot(1+\ln x);\quad f''(x)=\text{¿}\ x^x\cdot(1+\ln x)^2+x^x\cdot\frac{1}{x};$$

$$f'''(x)=x^x\left((1+\ln x)^3+3(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$ (см. Пример 1).

Оценим значение остаточного члена $R_n(x)$ для $n=2$:

$$R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}(x-1)^3,\ \text{где}\ 0{,}9<c<1\ \Rightarrow$$

$$0<c^c<1,\quad 0<\text{¿}\ 1+\ln c<1,\ \ 1<\frac{1}{c}<\frac{10}{9},\ \ 1<\frac{1}{c^2}<\frac{5}{4}.$$ Далее:

$$f'''(c)=c^c\left((1+\ln c)^3+3(1+\ln c)\frac{1}{c}-\frac{1}{c^2}\right)\Rightarrow\ |f'''(c)|<6\quad \forall c\in(0{,}9;1)$$

$$\Rightarrow\ |R_2(x)|=\frac{|f'''(c)|}{3!}|x-1|^3<\text{¿}\ \frac{6}{3!}(0{,}1)^3=\text{¿}\ 0{,}001.$$

Следовательно, при $n=2$ остаточный член в формуле **Тейлора** меньше заданной точности $\varepsilon=0{,}001$. Из формулы (4) имеем:

$$x^x\approx 1+(x-1)+(x-1)^2\Rightarrow 0{,}9^{0{,}9}\approx 1-0{,}1+0{,}01=0{,}91=0{,}910.$$

<u>Ответ</u>: $0{,}9^{0{,}9}\approx 0{,}910$.

Разработал доцент

кафедры высшей математики **А. П. Потапов**