

Раздел № 01 Линейная и векторная алгебра

Тема № 01 Линейная алгебра

Лекция № 01 Определители

Учебные вопросы:

1. Введение в линейную алгебру
2. Определители 2-го и 3-го порядка
3. Разложение определителя по строке и столбцу
4. Определители высших порядков
5. Определитель Вандермонда

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

1. Введение в линейную алгебру.

Основная задача темы – подготовка к изучению систем линейных уравнений. Математический инструмент, необходимый для решения этой задачи – теория определителей и матриц.

В качестве примера решить методом «исключений» систему 2-х линейных уравнений с 2-я неизвестными общего вида: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$. В процессе нахождения решений этой системы показать необходимость введения таких понятий, как определители и матрицы.

2. Определители 2-го и 3-го порядка.

Квадратные матрицы 2-го и 3-го порядка: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Введение понятия определителя квадратной матрицы.

Определитель 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

Определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \quad (2)$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило Саррюса. Примеры. Свойства определителей 2-го и 3-го порядка.

Свойство 1. Определитель не изменится, если все строки определителя заменить соответствующими столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство 2. При перестановке двух строк (двух столбцов) определитель меняет знак на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Свойство 3. Общий множитель строки (столбца) можно вынести за «знак»

определителя: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Свойство 4. Определитель с нулевой строкой (с нулевым столбцом), равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Свойство 5. Определитель, имеющий две одинаковые строки (два одинаковых

столбца), равен нулю: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0$

Свойство 6. Определитель, имеющий две пропорциональные строки (два

пропорциональных столбца), равен нулю: $\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

Свойство 7. Если все элементы строки (столбца) представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство 8. Определитель не изменится, если к строке (к столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Разложение определителя по строке и столбцу.

Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя 3-го порядка. Минор M_{ij} элемента a_{ij} – это определитель матрицы 2-го порядка, полученный из определителя матрицы 3-го порядка путем вычеркивания i -ой строки и j -ого столбца, на пересечении которых находится a_{ij} . Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} –

это число, равное:

$$A_{ij} = M_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \quad (3)$$

Пример 1: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 23, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5.$$

Теорема разложения. Определитель 3-го порядка равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \text{ — разложение по 1-й строке,}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \text{ — разложение по 2-й строке,}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \text{ — разложение по 3-й строке,}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \text{ — разложение по 1-му столбцу,}$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \text{ — разложение по 2-му столбцу,}$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \text{ — разложение по 3-му столбцу.}$$

Вывод этих формул опирается на вычисление значений A_{ij} и правило **Саррюса**.

Пример 2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$

разложение по 1-й строке: $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$

$$= 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-8) + 3 \cdot (-10) = -4 - 16 - 30 = -50;$$

разложение по 3-му столбцу: $\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$

$$3 \cdot (-10) + 4 \cdot (-5) + 0 \cdot (-5) = -30 - 20 + 0 = -50.$$

Теорема аннулирования. Для определителя 3-го порядка сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0, \quad a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0,$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0, \quad a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0,$$

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0, \quad a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0,$$

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = 0, \quad a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = 0,$$

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0, \quad a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} = 0,$$

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0, \quad a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} = 0.$$

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственным вычислением значений A_{ij} и последующим упрощением полученных выражений (сумм).

4. Определители высших порядков.

Квадратные матрицы высших порядков. Индуктивное введение понятия определителя n -го порядка. Минор M_{ij} элемента a_{ij} — это определитель матрицы $(n - 1)$ -го порядка, полученной из данной матрицы n -го порядка путем вычеркивания i -ой строки и j -го столбца, на пересечении которых находится a_{ij} . Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} — это число, равное: $A_{ij} = M_{ij} \cdot (-1)^{i+j}$.

Теорема. Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) матрицы n -го порядка на их алгебраические дополнения - есть величина постоянная, не зависящая от номера строки и номера столбца:

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj},$$

$$i = 1 \div n; j = 1 \div n.$$

Например, для $n = 4$ и матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ имеем:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} &= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24} = \\ &= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{34} \cdot A_{34} = a_{41} \cdot A_{41} + a_{42} \cdot A_{42} + a_{43} \cdot A_{43} + a_{44} \cdot A_{44} = \\ &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{42} \cdot A_{42} = \\ &= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} = a_{14} \cdot A_{14} + a_{24} \cdot A_{24} + a_{34} \cdot A_{34} + a_{44} \cdot A_{44}. \end{aligned}$$

Определителем матрицы 4-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4} - \text{разложение}$$

по i -ой строке, $i = 1, 2, 3, 4$ или:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j} - \text{разложение}$$

по j -му столбцу, $j = 1, 2, 3, 4$. Аналогичные определения и в случае $n > 4$.

Определителем матрицы n -го порядка называется число, равное сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \\ &= a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Определители n -го порядка имеют те же свойства $1 \div 8$, что и определители 2-го и 3-го порядка. Кроме того, для них также справедливы теоремы разложения и аннулирования.

Пример 3. Вычисление определителя 4-го порядка

$$\begin{aligned}
 & \text{(здесь } S_i \text{ — } i\text{-ая строка, } C_j \text{ — } j\text{-ый столбец): } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\
 & = [S_2 - S_4] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [S_3 - 3S_4] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -8 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\
 & = [\text{разложение по } C_4] = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = [C_1 - 3C_2] = \\
 & = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 15 & -3 & -8 \\ 22 & -7 & -5 \end{vmatrix} = [C_3 - 2C_2] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -2 \\ 22 & -7 & 9 \end{vmatrix} = [\text{разлож. по } S_1] = \\
 & = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 15 & -2 \\ 22 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 15 & -2 \\ 22 & 9 \end{vmatrix} = -(135 + 44) = -179
 \end{aligned}$$

5. Определитель Вандермонда.

Определитель **Вандермонда** n -го порядка:

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные действительные числа. Вычисление определителя по рекуррентной формуле. Вывод формулы:

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \quad (5)$$

— это произведение всевозможных разностей $(x_i - x_j)$, где $i > j$. Например:

$$\Delta_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

Свойство: определитель **Вандермонда** обращается в ноль тогда и только тогда, когда среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть равные.

Одно из применений определителя **Вандермонда** — решение следующей задачи:

Для заданных n точек на плоскости $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ с различными абсциссами, найти многочлен степени не выше $n - 1$, график которого проходит через эти точки, т. е. найти многочлен вида:

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \text{ — такой, что } \begin{cases} Q(x_1) = y_1 \\ Q(x_2) = y_2 \\ \dots \dots \dots \\ Q(x_n) = y_n \end{cases}$$

**Разработал доцент
кафедры высшей математики**

А. П. Потапов