ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **01** **Линейная алгебра**

Лекция № **02** **Матрицы**

Учебные вопросы:

1. **Виды матриц**
2. **Линейные действия с матрицами**
3. **Умножение матриц**
4. **Обратная матрица**
5. **Ранг матрицы**

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

1. Виды матриц.

Понятие матрицы. Элементы матрицы, строки и столбцы, размеры матрицы. Виды матриц: транспонированная, нулевая, противоположная, матрица-строка, матрица-столбец, квадратная, треугольная, диагональная, единичная, ступенчатая. Равенство матриц:

$$\mathrm{A}_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\ \mathrm{B}_{p,q}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_{m,n}=\mathrm{B}_{p,q}\ \Leftrightarrow \begin{cases} m=p,\ \ n=q\\ a_{\boldsymbol{ij}}=\ b_{\boldsymbol{ij}},\ i=1,\dots,m;\ \ j=1,\dots,n\end{cases}$$

2. Линейные действия с матрицами.

Сложение и вычитание матриц.

$$A=\mathrm{A}_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\ \ B=\mathrm{B}_{m,n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn}\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Умножение матрицы на число.

$$A=\mathrm{A}_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\lambda}\text{ — число }\Rightarrow$$

$$\lambda\cdot A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{11} & \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{12} & \dots & \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{1n} \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{21} & \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{22} & \dots & \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{m1} & \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{m2} & \dots & \boldsymbol{\lambda}\cdot a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Свойства линейных действий с матрицами. Пусть A, B, C — матрицы одинаковых размеров; λ, α, β — действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства.

Свойство **1**: $A + B = B + A$ (коммутативность сложения матриц).

Свойство **2**: $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения матриц).

Свойство **3**: $\alpha\cdot(\beta\cdot A) = (\alpha\cdot\beta)\cdot A$ (однородность относительно умножения на число).

Свойство **4**: $(\alpha + \beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Свойство **5**: $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц).

Свойство **6**: $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$ (свойство нулевой матрицы).

Свойство **7**: $A + (-A) = \mathbb{O}$ (свойство противоположной матрицы).

Свойство **8**: $0\cdot A = \mathbb{O}$; $1\cdot A = A$ (свойства умножения на 1 и на 0).

3. Умножение матриц

Умножение матрицы-строки на матрицу-столбец с одинаковым числом элементов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + \dots + a_{1n}\cdot b_{n1} \qquad (4)$$

Согласованные матрицы. Матрицы A и B — называются согласованными для умножения $A\cdot B$, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Например, $A_{m,k}$ и $B_{k,n}$ — согласованные матрицы для умножения $A\cdot B$. Умножение согласованных матриц $A_{m,k}$ и $B_{k,n}$.

Разобьем матрицу A на строки, а матрицу B — на столбцы:

$$A_{m,k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{\mathrm{m}} \end{pmatrix},$$

где $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{pmatrix}$ — матрица-строка,

$$B_{k,n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{\mathrm{n}} \end{pmatrix},$$

где $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$ — матрица-столбец. Далее вычисляем произведения $A_i \cdot B_j$ матриц-строк

A_i на матрицы-столбцы B_j, $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$.

Произведение согласованных матриц $A_{m,k}$ и $B_{k,n}$:

$$A_{m,k} \cdot B_{k,n} = C_{m,n} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B_1 & A_1 \cdot B_2 & \ldots & A_1 \cdot B_n \\ A_2 \cdot B_1 & A_2 \cdot B_2 & \ldots & A_2 \cdot B_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m \cdot B_1 & A_m \cdot B_2 & \ldots & A_m \cdot B_n \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ − согласованы для умножения $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Найдем эти произведения:

$$A_{2,3} \cdot B_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-5) & 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-5) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -23 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -23 & 19 \end{pmatrix}.$$

$$B_{3,2} \cdot A_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \\ (-5) \cdot 3 + 4 \cdot 1 & (-5) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & (-5) \cdot 0 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -15 \\ 1 & 2 & 5 \\ -11 & 13 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot A =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -15 \\ 1 & 2 & 5 \\ -11 & 13 & 20 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц. Пусть $A, B, C, \mathbb{O}, E$ − согласованные матрицы; λ − действительное число. Тогда справедливы следующие свойства.

Свойство **1**: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность умножения матриц).

Свойство **2**: $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B$ (однородность умножения).

Свойство **3**: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность относительно сложения матриц).

Свойство **4**: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность относительно сложения матриц).

Свойство **5**: $A \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$, $\mathbb{O} \cdot A = \mathbb{O}$ (свойство нулевой матрицы).

Свойство **6**: $A \cdot E = A$, $E \cdot A = A$ (свойство единичной матрицы).

Свойства, связанные с транспонированием матриц.

<u>Свойство</u> **1**: $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$; <u>Свойство</u> **2**: $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

<u>Свойство</u> **3**: $(\lambda \cdot A)^{\mathrm{T}} = \lambda \cdot A^{\mathrm{T}}$; <u>Свойство</u> **4**: $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Свойства, связанные с определителями матриц. Пусть $A, E, \mathbb{O}$ − квадратные матрицы размера $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$. Тогда справедливы следующие свойства.

<u>Свойство</u> **1**: $det\,(A^{\mathrm{T}}) = det\,A$ (определитель транспонированной матрицы равен определителю самой матрицы).

<u>Свойство</u> **2**: $det\,\mathbb{O} = 0$ (определитель нулевой матрицы равен нулю).

<u>Свойство</u> **3**: $det\,E = 1$ (определитель единичной матрицы равен единице).

<u>Свойство</u> **4**: $det\,(-A) = (-1)^n \cdot det\,A$ (определитель противоположной матрицы).

<u>Свойство</u> **5**: $det\,(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det\,A$ (определитель произведения матрицы на число).

<u>Свойство</u> **6**: $det\,(A \cdot B) = det\,A \cdot det\,B$ (определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц).

4. Обратная матрица.

Понятие обратной матрицы. Вырожденные и невырожденные матрицы. Существование и единственность обратной матрицы. Присоединенная матрица. Вычисление обратной матрицы через присоединенную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \Delta = det\,A \neq 0 \ \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где A_{ij} − алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$.

Например, для $n = 2$ имеем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Свойства обратной матрицы. Пусть A и B невырожденные матрицы одного размера. Тогда справедливы следующие свойства.

<u>Свойство</u> **1**: $(A^{-1})^{-1} = A$. <u>Свойство</u> **2**: $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

<u>Свойство</u> **3**: $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$, $\lambda \neq 0$. <u>Свойство</u> **4**: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

<u>Свойство</u> **5**: $det\,(A^{-1}) = (det\,A)^{-1}$.

Решение матричных уравнений вида: $A \cdot X = B$, $X \cdot A = B$, $A \cdot X \cdot B = C$.

5. Ранг матрицы.

Понятия линейной зависимости и независимости строк (столбцов) матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Понятие минора k-го порядка, $1 \le k \le min\ \{m, n\}$ матрицы A.

Ранг матрицы как наибольший порядок отличных от нуля миноров матрицы A и как максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы A. Понятие базисного минора. Теорема о базисном миноре.

Элементарные преобразования матрицы. Ступенчатая матрица. Ранг ступенчатой матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Вычисление ранга матрицы путем приведения её к ступенчатому виду.

Разработал доцент
кафедры высшей математики **А. П. Потапов**