



Раздел № 01 Линейная и векторная алгебра

Тема № 01 Линейная алгебра

**Лекция № 03 Системы линейных уравнений с
квадратной матрицей**

1. Основные понятия
2. Квадратные системы линейных уравнений. Матричный метод.
3. Квадратные системы линейных уравнений. Метод Крамера.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

[illegible]

Здесь $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основная матрица системы,

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} - \text{расширенная матрица системы,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных.}$$

Понятие решения системы. Понятия совместной и несовместной, определенной и неопределенной системы. Элементарные преобразования системы.

Две системы — равносильны, если они имеют одинаковое число неизвестных и множества решений этих систем совпадают. Равносильность систем, полученных одна из другой путем элементарных преобразований.

Матричная запись системы линейных уравнений: $A \cdot X = B$

Рассматривается система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$):

(2)

Теорема. Если матрица A – невырожденная, то существует единственное решение системы, которое в матричной форме имеет вид:

(3)

Пример 1. $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 8+9 \\ -40+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{OTBet}}: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Пример 2.
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16. \\ 5y - z = 10 \end{cases}$$

$$\text{Здесь } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-29} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 15 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \\ -5 & 10 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = A^{-1} \cdot B =$$

$$= \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 15 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \\ -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 75 - 16 - 30 \\ -5 + 32 + 60 \\ -25 + 160 + 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 87 \\ 145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Ответ:}} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \\ z = 5 \end{cases}$$

3. Квадратные системы линейных уравнений. Метод Крамера.

Рассматривается система линейных уравнений (2), в которой число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$):

Введем обозначения: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ — основной определитель

$$\text{системы, } \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix} - \text{вспомогательные определители системы. Определитель } \Delta_j$$

получается из определителя Δ заменой j -го столбца на столбец свободных членов.

Теорема Крамера. Если основной определитель Δ отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое формулами **Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (3)$$

Пример 3. $\begin{cases} 2x - 3y = 8; \\ 5x + y = 3 \end{cases}$; здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 17$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 17$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -34 \Rightarrow x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-34}{17} = -2$$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Пример 4. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16; \\ 5y - z = 10 \end{cases}$; здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$, $\Delta_2 =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -87, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -145 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-87}{-29} = 3, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-145}{-29} = 5$$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$.

Разработал доцент

кафедры высшей математики

А. П. Потапов