

Раздел № 01 Линейная и векторная алгебра

Тема № 01 Линейная алгебра

**Лекция № 04 Произвольные системы линейных
уравнений**

1. Исследование системы линейных уравнений
2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
3. Однородные системы линейных уравнений

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

Рассматривается произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными:

Введём обозначения:

A – основная матрица системы, $(A|B)$ – расширенная матрица системы.

Исследовать систему (1) означает выяснить, является ли эта система совместной или несовместной, и в случае совместности выяснить, является ли она определенной или неопределенной.

Теорема Кронекера–Капелли. Для того чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы был равен рангу расширенной матрицы: $rg A = rg (A|B)$.

При этом если $\mathbf{r} = r.g \ A = r.g \ (A|B)$, то:

- а) при $r = n$ система является *определенной* (имеет единственное решение);
б) при $r < n$ система является *неопределенной* (имеет бесчисленное множество решений).

Пример 1. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и определенность:

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases} \text{ . Здесь } m = 3, n = 4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

Расширенную и основную матрицы системы одновременно приведём к ступенчатому виду (обозначение: S_i – i -тая строка, $i = 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned}
 (A|B) &\rightarrow [S_1 - 3S_3; S_2 - 2S_3] \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 21 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 &\rightarrow [S_1 : (-4); S_2 : (-3)] \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow [S_1 - S_2] \rightarrow \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow [S_1 \leftrightarrow S_3] \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 &\rightarrow [\text{перестановка столбцов}] \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 14 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Основная и расширенная матрицы приведены к ступенчатым матрицам с 3-мя ненулевыми строками. Следовательно, $rg A = rg (A|B) = r = 3$. По теореме **Кронекера-Капелли** эта система – совместная. Так как $r < n = 4$, то система – неопределенная.
Ответ: система – совместная и неопределенная.

2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод **Гаусса** включает 2 этапа: 1-й этап (прямой ход) и 2-й этап (обратный ход).

На 1-м этапе систему линейных уравнений приводим путем элементарных преобразований к системе со ступенчатой расширенной матрицей и проводим исследование системы на совместность и определенность с использованием теоремы **Кронекера-Капелли**. В случае несовместности системы этот процесс заканчиваем, а в случае совместности – переходим ко 2-му этапу.

На 2-м этапе находим решение полученной системы со ступенчатой расширенной матрицей путем последовательного вычисления неизвестных, начиная с последнего уравнения.

Если система – неопределенная, то выбираем базисный минор в полученной ступенчатой основной матрице и указываем базисные переменные (соответствующие базисному минору) и оставшиеся свободные переменные.

Пример 2. Найти все решения системы (общее решение):

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$$

В Примере 1 эта система была исследована: она является совместной и неопределенной: $r = 3$, $n = 4$. Расширенная матрица полученной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \\ x_3 + 8x_4 = -7 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

соответственно, базисные переменные x_2, x_3, x_4 ; значит, x_1 — единственная оставшаяся свободная переменная.

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 - 3x_1 \\ x_3 + 8x_4 = -7 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 8 + 3x_3 + 14x_4 + 3x_1 \\ x_3 = -7 - 8x_4 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ответ. Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = -13 + 3c \\ x_3 = -7 \\ x_4 = 0 \end{cases}, c \in R \text{ или в матричном виде: } X = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, c \in R.$$

Однородная система линейных уравнений имеет вид:

[illegible]

или в матричном виде: $A \cdot X = \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Любая однородная система совместна, т. к. всегда есть нулевое решение: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X =$

ⓐ. Кроме нулевого решения у однородной системы могут быть и ненулевые решения.

Свойства решений однородной системы:

Свойство 1: если матрица-столбец X является решением однородной системы и λ — произвольное число, то $\lambda \cdot X$ также является решением однородной системы.

Свойство 2: если матрицы-столбцы X_1 и X_2 являются решениями однородной системы, то их сумма $X_1 + X_2$ также является решением однородной системы.

Следствие. Если матрицы-столбцы $X_1, X_2, \dots, X_k$ являются решениями однородной системы, то любая их линейная комбинация:

$c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \dots + c_k \cdot X_k$ — также является решением однородной системы.

Из теоремы **Кронекера–Капелли** следует, что если $rg A = n$, то однородная система имеет только нулевое решение; если $rg A < n$, то однородная система имеет еще и ненулевые решения.

Пусть $r = rg A$. Если $r < n$, то количество свободных переменных у системы равно $n - r$. Тогда общее решение однородной системы линейных уравнений в матричной форме имеет вид:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \dots + c_{n-r} \cdot X_{n-r}, \quad (3)$$

где c_i — произвольные числа. При этом набор частных решений $\{X_1, X_2, \dots, X_{n-r}\}$ называется фундаментальной системой решений (ФСР).

При решении однородных систем линейных уравнений методом **Гаусса** достаточно преобразовать к ступенчатому виду лишь основную матрицу.

Пример 3. Найти общее решение и ФСР однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Применим метод **Гаусса** ($r = rg A$):

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [S_2 - 3S_1; S_3 - S_1; S_4 - 2S_1] \rightarrow \\ &\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow [S_2 - 2S_4; S_3 - 2S_4] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \\ [S_2 \leftrightarrow S_4] &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2, n = 5, n - r = 3. \end{aligned}$$

В качестве базисного минора можно взять $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$, соответственно базисными переменными будут x_1, x_2 , а свободными — x_3, x_4, x_5 .

Запишем систему с новой матрицей:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 - 2x_3 + 16x_4 - 3x_5 \\ 8x_2 = 7x_3 - 25x_4 + 4x_5 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$, где c_1, c_2, c_3 — произвольные числа. Тогда $8x_2 = 7c_1 - 25c_2 + 4c_3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{8} \cdot (7c_1 - 25c_2 + 4c_3)$.

Введем новые обозначения: $C_1 = \frac{1}{8} \cdot c_1$, $C_2 = \frac{1}{8} \cdot c_2$, $C_3 = \frac{1}{8} \cdot c_3$. Тогда получим: $x_3 = 8C_1$, $x_4 = 8C_2$, $x_5 = 8C_3$, $x_2 = 7C_1 - 25C_2 + 4C_3$,
 $x_1 = 5 \cdot (7C_1 - 25C_2 + 4C_3) - 16C_1 + 128C_2 - 24C_3 = 19C_1 + 3C_2 - 4C_3$.

Ответ: общее решение:
$$\begin{cases} x_1 = 19C_1 + 3C_2 - 4C_3 \\ x_2 = 7C_1 - 25C_2 + 4C_3 \\ x_3 = 8C_1 \\ x_4 = 8C_2 \\ x_5 = 8C_3 \end{cases}, C_1, C_2, C_3 \in R$$

или в матричном виде:

$$X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -25 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}; \text{ ФСР: } \left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -25 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Разработал доцент

кафедры высшей математики

А. П. Потапов