

Раздел № 01 Линейная и векторная алгебра

Тема № 02 Векторная алгебра

Лекция № 05 Линейные действия с векторами

Учебные вопросы:

1. Основные понятия
2. Линейные действия с векторами
3. Линейные пространства
4. Линейные векторные пространства V_1, V_2, V_3

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

1. Основные понятия.

Геометрический (свободный) вектор, начало и конец вектора. Модуль вектора, нулевой вектор. Противоположный вектор. Коллинеарные векторы, компланарные векторы. Орт вектора. Равенство векторов. Угол между векторами. Ортогональные векторы.

2. Линейные действия с векторами.

Сложение векторов. Правило треугольника и правило параллелограмма. Вычитание векторов. Умножение вектора на число. Свойства линейных действий с векторами:

Свойство 1: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения векторов).

Свойство 2: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность сложения векторов).

Свойство 3: $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ (однородность относительно умножения на число).

Свойство 4: $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Свойство 5: $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов).

Линейная комбинация векторов. Понятия линейной зависимости и линейной независимости системы векторов. Свойства линейно зависимых векторов, геометрический смысл линейной зависимости 2-х и 3-х векторов. Линейная зависимость любых 4-х и более векторов.

3. Линейные пространства.

Линейное пространство — это множество $\mathcal{L} = \{x\}$, в котором определены

линейные действия: сложение элементов и умножение элементов на вещественные числа, причём эти действия удовлетворяют следующим 8-и свойствам (аксиомам):

Аксиома 1: $x + y = y + x$ (коммутативность сложения элементов).

Аксиома 2: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения элементов).

Аксиома 3: $x + \mathbb{0} = x$ (существование в $\mathcal{L}$ нулевого элемента $\mathbb{0}$).

Аксиома 4: $x + (-x) = \mathbb{0}$ (существование для любого x противоположного элемента).

Аксиома 5: $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ (однородность относительно умножения на числа α, β).

Аксиома 6: $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Аксиома 7: $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (дистрибутивность относительно сложения элементов).

Аксиома 8: $1 \cdot x = x$ (свойство единичного множителя).

Базис и размерность линейного пространства ($\dim \mathcal{L}$). Разложение элемента линейного пространства по базису. Координаты и компоненты элемента относительно базиса. Единственность разложения по базису.

Примеры линейных пространств, их базисы и размерности.

Пример 1. Координатное пространство: $\mathcal{L} = R^n$ – множество всевозможных упорядоченных наборов n вещественных чисел; элементы $x \in R^n$ записываются в виде

матрицы-столбца: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ или матрицы-строки: $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$.

Размерность этого пространства $\dim \mathcal{L} = n$.

В качестве базиса в R^n можно

взять набор элементов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$,

где $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Пространство матриц фиксированного размера $m \times n$:

$\mathcal{L} = \{A_{m \times n}\}$. Размерность этого пространства $\dim \mathcal{L} = m \cdot n$.

Например, пространство матриц $\mathcal{L} = \{A_{2 \times 2}\}$; здесь $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – произвольный элемент пространства, размерность пространства равна 4. В качестве базиса можно взять набор элементов $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,

где $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Пространство решений **однородной** системы линейных уравнений с матрицей $A = A_{m \times n}$: $\mathcal{L} = \{X \in R^n: AX = \mathbb{O}\}$. Базисом этого пространства является **ФСР**: $\{X_1, X_2, \dots, X_{n-r}\}$ – фундаментальная система решений; размерность этого пространства $\dim \mathcal{L} = n - r$, где $r = \text{rg } A$ (при $r < n$).

4. Линейные векторные пространства V_1, V_2, V_3 .

Линейное векторное пространство – это линейное пространство, элементами которого являются векторы.

Пусть L – фиксированная прямая в пространстве, тогда V_1 – множество всех векторов, лежащих на прямой L или параллельных этой прямой – является линейным векторным пространством. Базис V_1 – это любой ненулевой вектор $\vec{e}$ этого пространства, $\dim V_1 = 1$.

Пусть π – фиксированная плоскость в пространстве, тогда V_2 – множество всех векторов, лежащих в плоскости π или в параллельных ей плоскостях – является линейным векторным пространством. Базис V_2 – это любая пара неколлинеарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ из этого пространства, $\dim V_2 = 2$.

V_3 – множество всех векторов в пространстве – является линейным векторным пространством. Базис V_3 – это любая тройка некомпланарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ из этого пространства, $\dim V_3 = 3$.

Понятия ортогонального и ортонормированного базисов в пространствах V_2 и V_3 .

Условия **коллинеарности** векторов в пространствах V_2 и V_3 , выраженные через координаты векторов:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}\{\alpha_1; \beta_1\} \parallel \vec{b}\{\alpha_2; \beta_2\} &\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \vec{a}\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\} \parallel \vec{b}\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\} &\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \\ \vec{a}\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\} \parallel \vec{b}\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Условие **компланарности** векторов в пространстве V_3 , выраженное через координаты векторов: $\vec{a}\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}, \vec{b}\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}, \vec{c}\{\alpha_3; \beta_3; \gamma_3\}$:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Разработал доцент

кафедры высшей математики

А. П. Потапов