ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **02** **Векторная алгебра**

Лекция № **06** **Произведения векторов**

Учебные вопросы:

1. Скалярное произведение векторов и его свойства

2. Векторное произведение векторов и его свойства

3. Смешанное произведение векторов и его свойства

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

1. Скалярное произведение векторов и его свойства.

Проекция вектора на ось и её свойства. Скалярное произведение векторов, его физический и геометрический смысл. Свойства скалярного произведения.

Свойство **1**: $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}$ (коммутативность).

Свойство **2**: $(\lambda\cdot\vec{\boldsymbol{a}})\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = \lambda\cdot(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})$ (ассоциативность относительно умножения на число).

Свойство **3**: $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}$ (дистрибутивность).

Свойство **4**: $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2$ (скалярный квадрат).

Свойство **5**: $\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = 0$ (условие ортогональности векторов).

Свойство **6**: $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}$ — острый угол; $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi}$ — тупой угол.

Таблица скалярного умножения:

Здесь $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ – ортонормированный базис в пространстве.

$\cdot$	$\vec{\boldsymbol{i}}$	$\vec{\boldsymbol{j}}$	$\vec{\boldsymbol{k}}$
$\vec{\boldsymbol{i}}$	1	0	0
$\vec{\boldsymbol{j}}$	0	1	0
$\vec{\boldsymbol{k}}$	0	0	1

Геометрические задачи на применение скалярного произведения векторов.

Пример 1. Найти модуль вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$, если известно: $\vec{\boldsymbol{a}} = 2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $|\vec{r}| = 4$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$, $\angle(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{q}, \vec{r}) = \frac{\pi}{4}$.

Решение. $|\vec{\boldsymbol{a}}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = (2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r})\cdot(2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}) = 4\vec{p}\cdot\vec{p} - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + 2\vec{p}\cdot\vec{r} - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + + \vec{q}\cdot\vec{q} - \vec{q}\cdot\vec{r} + 2\vec{p}\cdot\vec{r} - \vec{q}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\vec{r} = 4\vec{p}\cdot\vec{p} - 4\vec{p}\cdot\vec{q} + 4\vec{p}\cdot\vec{r} - 2\vec{q}\cdot\vec{r} + \vec{q}\cdot\vec{q} + \vec{r}\cdot\vec{r} =$

$= 4\cdot2\cdot2 + 4\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot2\cdot4\cdot0 - 2\cdot3\cdot4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\cdot3 + 4\cdot4 = 16 + 12 + 0 - 12\sqrt{2} + +9 + 16 = 53 - 12\sqrt{2}$.

Ответ: $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{53 - 12\sqrt{2}}$.

Пример 2. Найти длины диагоналей d_1 и d_2 параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$,
$\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$ (см. рис.1)

Решение.

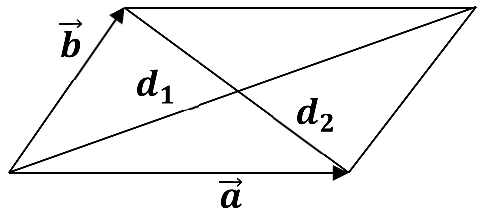

Рис. 1. К решению Примера **1**

$d_1 = \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, $d_2 = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$;

$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{p} - 4\vec{q}$;

$d_1^2 = (3\vec{p} - 2\vec{q})\cdot(3\vec{p} - 2\vec{q} =$

$= 9\vec{p}\cdot\vec{p} - 12\vec{p}\cdot\vec{q} + 4\vec{q}\cdot\vec{q} = 9\cdot2\cdot2 - 12\cdot2\cdot3\cdot0{,}5 + 4\cdot$

$d_2^2 = (-\vec{p} - 4\vec{q})\cdot(-\vec{p} - 4\vec{q}) = \vec{p}\cdot\vec{p} + 8\vec{p}\cdot\vec{q} + 16\vec{q}\cdot\vec{q} = 2\cdot2 + 8\cdot2\cdot3\cdot0{,}5 + 16\cdot3\cdot3 = = 172 \Rightarrow d_2 = \sqrt{172}$**.**

Ответ: $d_1 = 6$, $d_2 = \sqrt{172}$.

Теорема косинусов, теорема **Пифагора**, вывод формул.

2. Векторное произведение векторов и его свойства.

Ориентация тройки векторов в пространстве, её свойства. Векторное произведение векторов, его физический и геометрический смысл. Свойства векторного произведения.

Свойство **1**: $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = -\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}}$ (антикоммутативность).

Свойство **2**: $(\lambda\cdot\vec{\boldsymbol{a}})\times \vec{\boldsymbol{b}} = \lambda\cdot(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}})$ (ассоциативность относительно умножения на число).

Свойство **3**: $\vec{\boldsymbol{a}} \times(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{c}}$ (дистрибутивность).

Свойство **4**: $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ (векторный квадрат).

Свойство **5**: $\vec{\boldsymbol{a}} \,||\, \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ (условие коллинеарности векторов).

Таблица векторного умножения:

Здесь $\{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ – ортонормированный базис в пространстве.

$\times$	$\vec{\boldsymbol{\imath}}$	$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$	$\vec{\boldsymbol{k}}$
$\vec{\boldsymbol{\imath}}$	$\vec{\boldsymbol{0}}$	$\vec{k}$	$-\vec{\jmath}$
$\vec{\boldsymbol{\jmath}}$	$-\vec{k}$	$\vec{\boldsymbol{0}}$	$\vec{\imath}$
$\vec{\boldsymbol{k}}$	$\vec{\jmath}$	$-\vec{\imath}$	$\vec{\boldsymbol{0}}$

Геометрические задачи на применение векторного произведения векторов.

Пример 3. Найти площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$, если $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle\,(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

Решение. $\mathrm{S} = \left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right|$;

$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = (\vec{p} - 3\vec{q}) \times (2\vec{p} + \vec{q}) = 2\vec{p} \times \vec{p} - 6\vec{q} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} - 3\vec{q} \times \vec{q} = 7\vec{p} \times \vec{q}$; $|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}| = 7|\vec{p} \times \vec{q}| = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 21.$

Ответ: $S = 21.$

Пример 4. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$ будут коллинеарны, если $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{q} - \vec{p}$, $\vec{p}\{2; \alpha; 1\}$, $\vec{q}\{\beta; 3; -1\}$.

Решение. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{p} + 2\vec{q}) \times (\vec{q} - \vec{p}) = \vec{0}$;

$(\vec{p} + 2\vec{q}) \times (\vec{q} - \vec{p}) = \vec{p} \times \vec{q} - \vec{p} \times \vec{p} + 2\vec{q} \times \vec{q} - 2\vec{q} \times \vec{p} =$

$= \vec{p} \times \vec{q} - \vec{0} + \vec{0} + 2\vec{p} \times \vec{q} = 3\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} \times \vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{p}\{2; \alpha; 1\} \parallel \vec{q}\{\beta; 3; -1\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \beta & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

Ответ: $\begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -2 \end{cases}.$

3. Смешанное произведение векторов и его свойства.

Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл. Свойства смешанного произведения.

Свойство **1**. Смешанное произведение векторов не меняется при циклической перестановке множителей:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$$

Свойство **2**. Смешанное произведение векторов меняет знак при перестановке двух множителей:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}, \quad \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}, \quad \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

Свойство **3**: Необходимым и достаточным условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

Свойство **4**:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – правая тройка; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – левая тройка.

Геометрические задачи на применение смешанного произведения векторов.

Пример 5. Найти объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$, $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$,

$\gamma = \angle\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \frac{\pi}{4}$ (см. рис. 2)

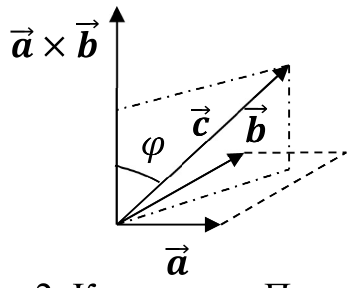

Рис. 2. К решению Примера **5**

<u>Решение</u>.

Пусть φ − угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ (см. рис. 2).

$V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot |\vec{c}| \cdot |\cos\varphi| =$

$= 2 \cdot 3 \cdot \sin\alpha \cdot 4 \cdot \cos\varphi = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos\varphi = 24 \cdot |\cos\varphi|$.

Учитывая формулу: $\cos^2\varphi + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ − получим:

$\cos^2\varphi = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow |\cos\varphi| = \frac{1}{2} \Rightarrow V = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$. <u>Ответ</u>: $V = 12$.

Разработал доцент

кафедры высшей математики **А. П. Потапов**