ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **02** **Векторная алгебра**

Лекция № **07** **Системы координат**

Учебные вопросы:

1. Прямоугольная декартова система координат

2. Действия с векторами в декартовой системе координат

3. Геометрические задачи, связанные с координатами векторов

4. Полярная система координат на плоскости

5. Цилиндрическая и сферическая система координат в пространстве

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

1. Прямоугольная декартова система координат.

Ортонормированные базисы правой ориентации $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$ на плоскости и $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ в пространстве. Оси координат: ось абсцисс, ось ординат и ось аппликат; начало координат.

Декартовы координаты точки — это координаты её радиус-вектора относительно ортонормированного базиса и проекции радиус-вектора на координатные оси (см. Рис. 1 и Рис. 2):

$$M(x;y) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OM}\,\{x;y\} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{\imath} + y\cdot\vec{\jmath} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \text{Пр}_{ox}\,\overrightarrow{OM} \\ y = \text{Пр}_{oy}\,\overrightarrow{OM} \end{cases};$$

$$M(x;y;z) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OM}\,\{x;y;z\} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{\boldsymbol{i}} + y\cdot\vec{\boldsymbol{j}} + z\cdot\vec{\boldsymbol{k}} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \text{Пр}_{ox}\,\overrightarrow{OM} \\ y = \text{Пр}_{oy}\,\overrightarrow{OM} \\ z = \text{Пр}_{oz}\,\overrightarrow{OM} \end{cases}$$

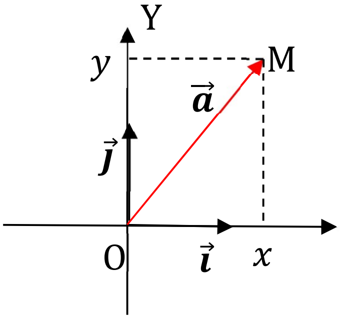

Рис. 1. О.Н.Б. на плоскости

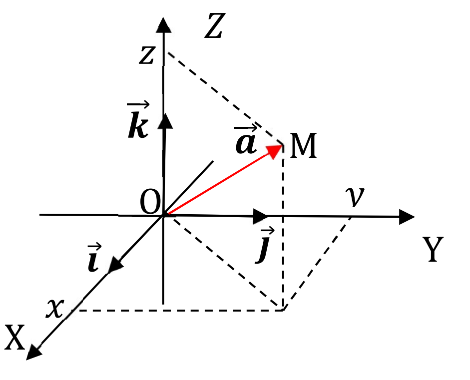

Рис. 2. О.Н.Б. в пространстве

Координаты вектора, выраженные через координаты начала и конца этого вектора:

$$A(x_1; y_1),\ B(x_2; y_2) \Rightarrow\ \overrightarrow{AB}\,\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\},$$

$$A(x_1; y_1; z_1),\ B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow\ \overrightarrow{AB}\,\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$$

2. Действия с векторами в декартовой системе координат.

Линейные действия с векторами в координатах:

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \Rightarrow$$

$$\alpha{\cdot}\vec{b} + \beta{\cdot}\vec{b}\,\{\alpha{\cdot}x_1 + \beta{\cdot}x_2;\ \alpha{\cdot}y_1 + \beta{\cdot}y_2;\ \alpha{\cdot}z_1 + \beta{\cdot}y_3\}$$

Умножение векторов (скалярное, векторное и смешанное произведение):

$$\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}, \vec{c}\,\{x_3; y_3; z_3\} \Rightarrow$$

$$\vec{a}{\cdot}\vec{b} = x_1{\cdot}x_2 + y_1{\cdot}y_2 + z_1{\cdot}z_2 \qquad (1)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}, \vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}, \vec{c}\,\{x_3;\ y_3\} \Rightarrow$$

$$\vec{a}{\cdot}\vec{b} = x_1{\cdot}x_2 + y_1{\cdot}y_2, \quad \vec{a}\times\vec{b} = \vec{k}{\cdot}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \qquad (4)$$

Геометрический смысл определителей 2-го и 3-го порядков. Условия ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов, выраженные через координаты векторов:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ x_1{\cdot}x_2 + y_1{\cdot}y_2 + z_1{\cdot}z_2 = 0 \qquad (5)$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{0} \qquad (6)$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны}\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

3. Геометрические задачи, связанные с координатами векторов.

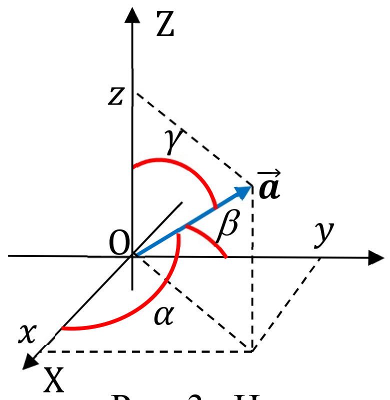

Рис. 3. Направляющие углы радиус-вектора

Вычисление модулей, проекций и направляющих косинусов векторов.

$$\vec{a}\,\{x; y; z\} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \qquad (8)$$

$\vec{a}\,\{x_1;\ y_1; z_1\}, \vec{b}\,\{x_2;\ y_2; z_2\} \Rightarrow$

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \quad \text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \qquad (9)$$

Вычисление углов, площадей и объемов.

Если φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (10)$$

Пусть $S_{\vec{a},\vec{b}}$ − площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ − объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Тогда

$$S_{\vec{a},\vec{b}} = |\vec{a}\times\vec{b}|, \qquad V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \qquad (11)$$

Деление отрезка в данном отношении (см. Рис. 4):

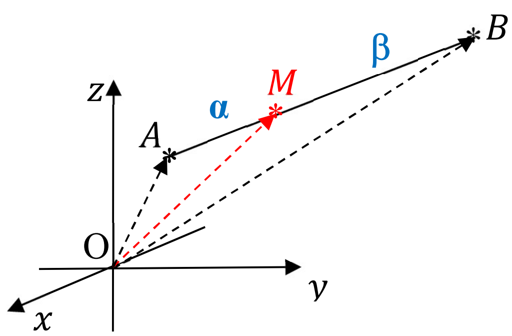

Рис. 4. Деление отрезка в данном отношении

$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{\alpha}{\beta} = \lambda,\ \vec{r_A} = \overrightarrow{OA},\ \vec{r_B} = \overrightarrow{OB},\ \vec{r_0} = \overrightarrow{OM} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{r_0} = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha \cdot \overrightarrow{r_B} + \beta \cdot \overrightarrow{r_A}) = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda \cdot \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_A}) \qquad (12)$$

$A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $M(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\alpha \cdot x_B + \beta \cdot x_A}{\alpha + \beta} = \frac{\lambda \cdot x_B + x_A}{1+\lambda} \\ y_0 = \frac{\alpha \cdot y_B + \beta \cdot y_A}{\alpha + \beta} = \frac{\lambda \cdot y_B + y_A}{1+\lambda} \\ z_0 = \frac{\alpha \cdot z_B + \beta \cdot z_A}{\alpha + \beta} = \frac{\lambda \cdot z_B + z_A}{1+\lambda} \end{cases} \qquad (13)$$

Координаты середины отрезка $[AB]$:

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_0 = \frac{z_A + z_B}{2} \qquad (14)$$

Координаты центра тяжести треугольника ABC:

$$x_0 = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_0 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},\ z_0 = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \qquad (15)$$

4. Полярная система координат на плоскости.

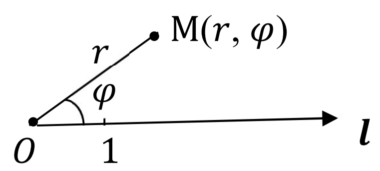

Рис. 5. Полярная система координат на плоскости

Полярная система координат на плоскости: полюс $\boldsymbol{O}$, полярная ось $\boldsymbol{l}$ (см. Рис. 5). Полярные координаты точки $M(r, \varphi)$: полярный радиус $r = |\overrightarrow{OM}|$ и полярный угол φ, образованный радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и полярной осью l, отсчитываемый от оси l против часовой стрелки, где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$.

Связь между декартовыми (x, y) и полярными координатами (r, φ):

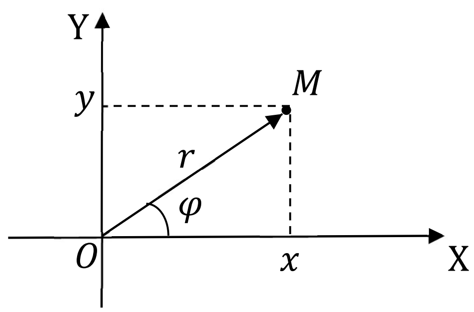

Рис. 6. Связь между декартовыми и полярными координатами

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\varphi = \frac{y}{x} \ (\text{при } x \neq 0) \end{cases} \qquad (16)$$

5. Цилиндрическая и сферическая система координат в пространстве

Цилиндрическая система координат в пространстве: ось OZ и полярная система координат на плоскости OXY. Цилиндрические координаты точки $M(r, \varphi, z)$, где r, φ

$-$ полярные координаты точки $M'$$-$ проекции точки M на плоскость OXY (см. Рис. 7), $r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\ \ (-\pi < \varphi \leq \pi), -\infty < z < +\infty$

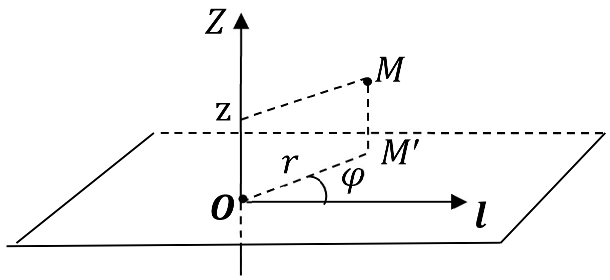

Рис. 7. Цилиндрическая система координат

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами: $\begin{cases} x = r \cdot cos\,\varphi \\ y = r \cdot sin\,\varphi. \\ \quad z = z \end{cases}$

Сферическая система координат в пространстве.

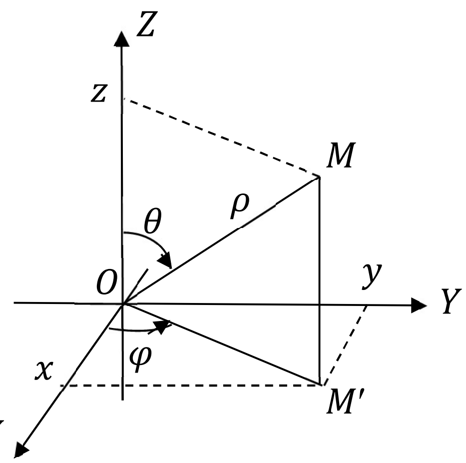

Рис. 8. Сферическая система координат

Сферические координаты точки $M(\rho, \varphi, \theta)$: $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ $-$ полярный радиус, φ $-$ угол между вектором $\overrightarrow{OM'}$ и осью OX, где M' — проекция точки M на плоскость OXY, θ $-$ угол между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью OZ (см. Рис. 8). Ограничения на сферические координаты: $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\ \ (-\pi < \varphi \leq \pi),\ 0 \leq \theta \leq \pi$.

Связь между декартовыми (x, y, z) и сферическими (ρ, φ, θ) координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \quad z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases} \tag{17}$$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **А. П. Потапов**