ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **01** **Линейная алгебра**

Практическое занятие № **01** **Определители**

Учебные вопросы:

1. Определители 2-го и 3-го порядка
2. Разложение определителя по строке и столбцу
3. Определители высших порядков

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/561012.

2. Давыдов Р. В. Линейная алгебра для студентов-машиностроителей: учебное пособие ч. 1, 2024, СПб: Политех-Пресс. URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/id24-210.pdf/view

Решение задач

Задача 1.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

Решение:

Используем известную формулу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

Ответ: -2

Задача 2.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение:

Здесь выгодно выбрать второй столбец (или строку) для разложения, поскольку он содержит 0, что сокращает вычисления:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 0 - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \text{¿}$$

$$\text{¿} 2 \cdot (36 + 42) - 8 \cdot (6 - 12) = 156 + 48 = 204$$

Ответ: 204

Задача 3.

Найти определитель n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 7 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 7 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 7 \end{vmatrix}$$

Решение:

Не меняя величины определителя, приведем его к треугольному виду. Для этого сначала вычтем первую строку из всех остальных:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Затем к 1-му столбцу прибавим каждый из последующих:

$$\begin{vmatrix} 7+5(n-1) & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Получили треугольную матрицу, у которой определитель равен произведению элементов на главной диагонали:

$$(7+5(n-1))\cdot 2^{n-1}=(5n+2)\cdot 2^{n-1}$$

Задача 4.

Найти определитель n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

Решение:

Преобразуем определитель: вынесем из первой строки a_1, а затем из первой строки вычтем вторую, поделенную на a_2.

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}=a_1\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\,a_1\begin{vmatrix} b_1-\dfrac{a_1b_2}{a_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}=\text{¿}$$

Разложим полученный определитель по первой строке:

$$¿a_1 \cdot \left(b_1 - \frac{a_1 b_2}{a_2}\right) \cdot \begin{vmatrix} a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_n b_n \end{vmatrix} = ¿$$

$$¿\frac{a_1}{a_2} \cdot (b_1 a_2 - a_1 b_2) \cdot \begin{vmatrix} a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_n b_n \end{vmatrix} = ¿$$

Получили рекуррентную формулу, связывающую определить n-го порядка с таким же определителем, но (n-1)-го порядка. Продолжая преобразования аналогичным образом, получаем, что:

$$¿\frac{a_1}{a_2} \cdot (b_1 a_2 - a_1 b_2) \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot (b_2 a_3 - a_2 b_3) \cdot \begin{vmatrix} a_3 b_3 & a_3 b_4 & \dots & a_3 b_n \\ a_3 b_4 & a_4 b_4 & \dots & a_4 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3 b_n & a_4 b_n & \dots & a_n b_n \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \frac{a_1}{a_n} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n-1} (b_i a_{i+1} - a_i b_{i+1}) \right) \cdot |a_n b_n| = a_1 b_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (b_i a_{i+1} - a_i b_{i+1})$$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**