ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **01** **Линейная алгебра**

Практическое занятие № **02** **Матрицы**

Учебные вопросы:

1. Линейные действия с матрицами
2. Умножение матриц
3. Обратная матрица
4. Ранг матрицы

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/561012.

2. Давыдов Р. В. Линейная алгебра для студентов-машиностроителей: учебное пособие ч. 1, 2024, СПб: Политех-Пресс. URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/id24-210.pdf/view

Решение задач

Задача №1:

Найти разность матриц$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$и$B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}=¿$$

$$¿\begin{pmatrix} 3-(-4) & 5-3 & -17-(-15) \\ -1-(-5) & 0-(-7) & 10-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Задача №2:

Умножить матрицу$A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$на матрицу$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}=¿$$

$$¿\begin{pmatrix} 5\cdot3+8\cdot4-4\cdot9 & 5\cdot2+8\cdot(-1)-4\cdot6 & 5\cdot5+8\cdot3-4\cdot5 \\ 6\cdot3+9\cdot4-5\cdot9 & 6\cdot2+9\cdot(-1)-5\cdot6 & 6\cdot5+9\cdot3-5\cdot5 \\ 4\cdot3+7\cdot4-3\cdot9 & 4\cdot2+7\cdot(-1)-3\cdot6 & 4\cdot5+7\cdot3-3\cdot5 \end{pmatrix}=¿\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$

Задача №3:

Найти обратную матрицу кAчерез присоединенную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

Найдем Δ - определитель матрицы A:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=2\cdot 8+2\cdot(-6)=4$$

Вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=8,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=12,\ A_{13}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=-6$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=-4,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=4$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-6,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=4$$

Составим из них присоединенную матрицу $A^{\text{¿}}$:

$$A^{\text{¿}}=\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -6 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot A^{\text{¿}}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -6 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1.5 \\ -1.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1.5 \\ -1.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача №4:

Найти ранг матрицы A путем приведения её к ступенчатому виду

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Приведем с помощью элементарных преобразований матрицу A к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\underset{\substack{I\leftrightarrow II \\ IV-2III}}{\rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\underset{\substack{II\text{ и }IV\text{ одинаковы} \\ \text{уберем }IV \\ III-II}}{\rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}\underset{I\leftrightarrow III}{\rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\underset{\substack{II-2I \\ III-I}}{\rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}\underset{III-3II}{\rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 18 & 41 \end{pmatrix}$$

В приведенной к ступенчатому виду матрице три ненулевых строки, откуда следует, что $rank\ A = 3$.

Ответ: 3

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**