ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **02** **Векторная алгебра**

Практическое занятие № **05** **Линейные операции с геометрическими векторами**

Учебные вопросы:

1. Линейные действия с векторами
2. Линейные пространства

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/561012.

Решение задач

Задача №1:

Даны произвольные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Доказать, что векторы $\vec{a}=2\vec{p}+5\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{c}=-4\vec{p}+\vec{q}$ линейно зависимы. Указать линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, дающую вектор $\vec{c}$.

Решение:

Построим плоскость на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, отложенных от общего начала. Тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат в той же плоскости и поэтому компланарны, а значит, и линейно зависимы.

Найдем линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, дающую вектор $\vec{c}$. Пусть

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{c}$$

Подставим сюда представление векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и упростим:

$$\lambda(2\vec{p}+5\vec{q})+\mu(3\vec{p}-\vec{q})=-4\vec{p}+\vec{q}$$

$$(2\lambda+3\mu)\vec{p}+(5\lambda-\mu)\vec{q}=-4\vec{p}+\vec{q}$$

Теперь достаточно найти λ и μ, являющиеся решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} 2\lambda+3\mu=-4 \\ 5\lambda-\mu=1 \end{cases}$$

Решив ее, находим:

$$\lambda=\frac{-1}{17}, \mu=\frac{-22}{17}$$

Итак, $\vec{c}=\frac{-1}{17}\vec{a}-\frac{22}{17}\vec{b}$.

Ответ: $\vec{c}=\frac{-1}{17}\vec{a}-\frac{22}{17}\vec{b}$

Задача №2:

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют в некотором исходном базисе координаты $\vec{a}\{-1;2;3\}$, $\vec{b}\{3;1;4\}$, $\vec{c}\{5;3;2\}$. Доказать, что эти векторы тоже образуют базис, и разложить по новому базису вектор $\vec{d}\{1;16;9\}$.

Решение:

Докажем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы. Допустим, что какая-то линейная комбинация этих векторов даёт нулевой вектор:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$$

Записав координаты векторов по столбцам, получим:

$$\alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Из этой записи вытекает однородная система уравнений:

$$\begin{cases}-\alpha+3\beta+5\gamma=0\\2\alpha+\beta+3\gamma=0\\3\alpha+4\beta+2\gamma=0\end{cases}$$

Для ее решения применим метод Крамера. Найдем основной определитель системы:

$\Delta=\begin{vmatrix}-1&3&5\\2&1&3\\3&4&2\end{vmatrix}=-2+27+40-15-12+12=50\neq0$, значит, система имеет единственное решение. Все вспомогательные определители, очевидно, равны нулю, т. к. у них один столбец полностью нулевой. Поэтому решение системы $\alpha=\beta=\gamma=0$. Это означает, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис в пространстве.

Далее найдём коэффициенты x, y и z разложения:

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{d}$$

Написав координаты векторов по столбцам, получим:

$$x\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\16\\9\end{pmatrix}$$

Решив полученную систему, например, методом Крамера, получим $x=3$, $y=-2$, $z=4$

Ответ: $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$

Задача №3:

Найти размерность пространства симметричных матриц фиксированного размера $n\times n$: $L=¿\{A_{n\times n}\}$, указать базис.

Решение:

Рассмотрим симметричную матрицу A размера $n\times n$. Элементы такой матрицы A удовлетворяют условию $a_{ij}=a_{ji}$. Это означает, что для определения такой матрицы достаточно знать только элементы, расположенные на или выше главной диагонали. Всего таких элементов:

n – на главной диагонали,

$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ – выше главной диагонали,

$n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ – суммарно.

Таким образом, размерность пространства равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

В качестве базиса можно взять n матриц с единственным ненулевым (равным единице) элементом на главной диагонали, а также матрицы с двумя ненулевыми (равными единице) элементами, симметричными относительно главной диагонали.

Ответ: $\frac{n(n+1)}{2}$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**