ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **02** **Векторная алгебра**

Практическое занятие № **06** **Декартовы координаты. Произведения векторов**

**Учебные вопросы:**

1. Скалярное произведение векторов и его свойства
2. Векторное произведение векторов и его свойства
3. Смешанное произведение векторов и его свойства

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/561012.

## Решение задач

**Задача №1:**

В треугольник $ABC$ известны координаты его вершин $A(3;-1;2)$, $B(1;4;5)$, $C(4;2;6)$. Найти косинус угла $ABC$.

**Решение:**

Угол $ABC$ образован векторами, выходящими из вершины $B$, т. е. $\overrightarrow{BA}\{2,5,-3\}$ и $\overrightarrow{BC}\{3,-2,1\}$. Поэтому:

$$\cos\angle ABC=\cos\angle\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3\cdot2+(-2)\cdot(-5)+1\cdot(-3)}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{4+25+9}}=¿$$

$$¿\frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{38}}=\frac{13}{2\sqrt{133}}$$

**Ответ:** $\frac{13}{2\sqrt{133}}$

**Задача №2:**

Про векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ известно, что $|\vec{p}|=5$ и $|\vec{q}|=4$, а $\angle(\vec{p},\vec{q})=150°$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=4\vec{p}-7\vec{q}$.

**Решение:**

Площадь искомого треугольника $S$ равна половине площади параллелограмма, построенного на этих векторах. А площадь параллелограмма равна векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдем сначала его:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(3\vec{p}+2\vec{q})\times(4\vec{p}-7\vec{q})=12(\vec{p}\times\vec{p})+8(\vec{q}\times\vec{p})-¿$$

$$-21(\vec{p}\times\vec{q})-14(\vec{q}\times\vec{q})=0-8(\vec{p}\times\vec{q})-21(\vec{p}\times\vec{q})-0=-29(\vec{p}\times\vec{q})$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{29}{2}\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|=\frac{29}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\angle(\vec{p},\vec{q})=\frac{29}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{2}=145$$

**Ответ:** 145

**Задача №3:**

Для трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ известно их смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\lambda$. Вычислить смешанное произведение $\vec{p}\vec{q}\vec{r}$, где $\vec{p}=2\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{r}=\vec{b}+4\vec{c}$.

**Решение:**

Вычислим это $\vec{p}\vec{q}\vec{r}$, используя свойства смешанного произведения:

$$\vec{p}\vec{q}\vec{r}=\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)\left(3\vec{a}-\vec{c}\right)\left(\vec{b}+4\vec{c}\right)=2\left(\vec{a}\left(3\vec{a}-\vec{c}\right)\left(\vec{b}+4\vec{c}\right)\right)+¿$$

$$+5\left(\vec{b}\left(3\vec{a}-\vec{c}\right)\left(\vec{b}+4\vec{c}\right)\right)=6\left(\vec{a}\vec{a}\left(\vec{b}+4\vec{c}\right)\right)-2\left(\vec{a}\vec{c}\left(\vec{b}+4\vec{c}\right)\right)+¿$$

$$+15\left(\vec{b}\vec{a}\left(\vec{b}+4\vec{c}\right)\right)-5\left(\vec{b}\vec{c}\left(\vec{b}+4\vec{c}\right)\right)=¿$$

$$¿0-2\vec{a}\vec{c}\vec{b}-8\vec{a}\vec{c}\vec{a}+15\vec{b}\vec{a}\vec{b}+60\vec{b}\vec{a}\vec{c}-5\vec{b}\vec{c}\vec{b}-20\vec{b}\vec{c}\vec{c}=¿$$

$$¿2\vec{a}\vec{b}\vec{c}+0+0-60\vec{a}\vec{b}\vec{c}-0-0=-58\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-58\lambda$$

**Ответ:** $-58\lambda$

**Разработал доцент**

**кафедры высшей математики** **Р. В. Давыдов**