Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **03** **Аналитическая геометрия на плоскости**

Практическое занятие № **08** **Прямая и плоскость в пространстве**

Учебные вопросы:

1. Плоскость в пространстве
2. Прямая в пространстве
3. Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/561012.

Решение задач

Задача №1:

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3;-1;1)$, $M_2(0;2;1)$, $M_3(-3;4;-2)$.

Решение:

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{M_1 M_2}\{-3,3,0\}$ и $\overrightarrow{M_1 M_3}\{-6,5,-3\}$

Вычислим вектор нормали:

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -6 & 5 & -3 \end{vmatrix}=-9\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}$$

Теперь можно записать уравнение плоскости:

$$-9(x-3)-9(y+1)+3(z-1=0$$

$$-9x-9y+3z+15=0$$

$$3x+3y-z-5=0$$

Ответ: $3x+3y-z-5=0$

Задача №2:

Найти угол между плоскостями $2x-2y+z-5=0$ и $x-z+7=0$.

Решение:

Составим векторы нормали $\overrightarrow{N_1}\{2,-2,1\}$ и $\overrightarrow{N_2}\{1,0,-1\}$ к прямым.

Затем найдем косинус угла φ между векторами нормали:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}|\cdot|\overrightarrow{N_2}|}=\frac{2\cdot1+(-2)\cdot0+1\cdot(-1)}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+0+1}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Отсюда $\varphi=\arccos\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Этот же угол будет и между плоскостями.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3\sqrt{2}}$

Задача №3:

Являются ли параллельными прямая $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z+1}{1}$ и плоскость $4x+2y-4z+1=0$?

Решение:

Прямая и плоскость параллельны, если направляющий вектор прямой $\vec{s}$ и вектор нормали плоскости $\vec{n}$ перпендикулярны. В нашем случае:

$$\vec{s}\{3,-4,1\},\vec{n}\{4,2,-4\}$$

Их скалярное произведение:

$$\vec{s}\cdot\vec{n}=4+(-4)\cdot 2+1\cdot(-4)=0$$

поэтому $\vec{s}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, а прямая и плоскость – параллельны.

Ответ: да

Задача №4:

Найти угол между прямой $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{0}$ и плоскостью $2x+y-2z-3=0$.

Решение:

Угол между прямой и плоскостью — это угол α между прямой и её проекцией на плоскость. Ясно, что $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, где β – угол между прямой и вектором нормали плоскости (рассматриваем острые углы).

В нашем примере:

$$\vec{s}\{3,4,0\},\vec{n}\{2,1,-2\}$$

Находим угол β:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{10}{5\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

Тогда $\alpha=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{3}$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**