

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **03** **Аналитическая геометрия на плоскости**

Практическое занятие № **09** **Прямая и плоскость в пространстве**

Учебные вопросы:

1. Плоскость в пространстве
2. Прямая в пространстве
3. Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: <https://urait.ru/bcode/561012>.

Решение задач

Задача №1:

Через точку $M(2;0;-3)$ провести плоскость, параллельную двум прямым:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{0}, \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}.$$

Решение:

Найдём вектор нормали $\vec{n}$ искомой плоскости. Он должен быть перпендикулярен направляющим векторам $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ данных прямых. Поэтому в качестве $\vec{n}$ можно взять векторное произведение:

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 14\vec{k}$$

Значит, общее уравнение плоскости имеет вид:

$$x + 4y + 14z + D = 0$$

Точка М должна лежать на плоскости, поэтому:

$$2 + 4 \cdot 0 + 14 \cdot (-3) + D = 0$$

Отсюда $D = 40$.

Итак, уравнение плоскости найдено:

$$x + 4y + 14z + 40 = 0$$

Ответ: $x + 4y + 14z + 40 = 0$

Задача №2:

Написать уравнение прямой на плоскости, проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол 30° .

Решение:

Так как дан угол наклона прямой, то проще всего написать уравнение с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b$$

По условию прямая проходит через точку $(0;0)$, поэтому $b=0$ и уравнение имеет вид:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

Ответ: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

Задача №3:

Найти проекцию точки $M(9; 3; 8)$ на плоскость $8x - 2y + z - 5 = 0$.

Решение:

Проекция точки – это пересечение плоскости и перпендикулярной к ней прямой, проведённой через данную точку. Найдём уравнение этой прямой.

Ясно, что в качестве направляющего вектора можно взять вектор нормали к плоскости $\vec{n}\{8, -2, 1\}$.

Канонические уравнения перпендикуляра тогда имеют вид:

$$\frac{x-9}{8} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1}$$

Для нахождения точки пересечения с плоскостью удобно перейти к параметрической форме:

$$t = \frac{x-9}{8} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1}$$

$$\begin{cases} x = 8t + 9 \\ y = -2t + 3 \\ z = t + 8 \end{cases}$$

Подставляя в уравнение плоскости, получаем:

$$8(8t+9) - 2(-2t+3) + (t+8) - 5 = 0$$

$$69t + 69 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Координаты проекции:

$$x = 1, y = 5, z = 7$$

Ответ: $(1; 5; 7)$

Задача №4:

При каких значениях параметра α плоскости $4x + \alpha y - 8z + 5 = 0$ и $\alpha x + y - 4z - 3 = 0$ параллельны и при каких – перпендикулярны?

Решение:

Составим векторы нормалей:

$$\vec{n}_1[4, \alpha, -8], \vec{n}_2[\alpha, 1, -4]$$

Плоскости параллельны, если $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны, а тогда их координаты должны быть пропорциональны:

$$\frac{4}{\alpha} = \frac{\alpha}{1} = \frac{-8}{-4} \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Плоскости перпендикулярны, если $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, т. е. их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$4 \cdot \alpha + \alpha \cdot 1 + (-8)(-4) = 0$$

$$5 \cdot \alpha + 32 = 0$$

$$\alpha = -6.4$$

Ответ: параллельны при $\alpha = 2$, перпендикулярны при $\alpha = -6.4$.

Разработал доцент
кафедры высшей математики

Р. В. Давыдов