ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **03** **Аналитическая геометрия на плоскости**

Практическое занятие № **10** **Кривые и поверхности второго порядка**

Учебные вопросы:

1. Эллипс
2. Гипербола
3. Парабола
4. Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/561012.

Решение задач

Задача №1:

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, если известна его малая полуось $b=\sqrt{5}$ и точка эллипса $M(\sqrt{3};-2)$

Решение:

Из условия следует, что эллипс в данной системе координат имеет каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Подставляя известную полуось b и координаты точки M, найдём a:

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(-2)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$$

$$\frac{3}{a^2}+\frac{4}{5}=1\Rightarrow a^2=\frac{1}{5}\Rightarrow a^2=15$$

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$$

Ответ: $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$

Задача №2:

Составить уравнение гиперболы, если её вершины лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2, а одна из асимптот имеет уравнение $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

Решение:

Гипербола в данной системе координат имеет каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

В такой системе координат асимптоты гиперболы задаются уравнениями $y=\pm\frac{b}{a}x$, поэтому $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Расстояние от фокуса до ближайшей вершины равно $c-a$. Учитывая, что $c^2-a^2=b^2$ и $c-a=2$, получаем систему:

$$\begin{cases} b^2=\frac{5}{4}a^2 \\ (a+2)^2-a^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow 4a+4=\frac{5}{4}a^2 \Rightarrow 5a^2-16a-16=0$$

Решив квадратное уравнение, найдём a:

$$a=\frac{16\pm\sqrt{256+320}}{10}=\frac{16\pm 24}{10}$$

Так как $a>0$, то $a=4$. Тогда $b=\frac{4\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$.

Искомое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$$

Ответ: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$

Задача №3:

Найти вершину A, фокус F и уравнение директрисы d параболы $y^2-6x+14y=0$

Решение:

Приведем уравнение параболы к каноническому виду $y^2=2px$:

$$y^2-6x+2\cdot 7\cdot y+7^2-7^2=0$$

$$(y+7)^2=6x+49$$

$$(y+7)^2=2\cdot 3\cdot\left(x+\frac{49}{6}\right)$$

Сделаем замену переменных: $\tilde{y}=y+7;\tilde{x}=x+\frac{49}{6}$ (параллельный перенос параболы):

$$\tilde{y}^2=2\cdot\underbrace{3}_{p}\cdot\tilde{x}$$

Координаты вершины A этой параболы:

$$\begin{cases}\tilde{x}=0\\ \tilde{y}=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-49}{6}\\ y=-7\end{cases}$$

Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)=F\left(\frac{3}{2};0\right)$ нужно подправить с учетом параллельного переноса:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{49}{6};0-7\right)=\left(\frac{-20}{3};-7\right)$$

Директриса d:

$$\tilde{x}+\frac{p}{2}=0\Longleftrightarrow x+\frac{49}{6}+\frac{3}{2}=0\Longleftrightarrow x=\frac{-58}{6}=\frac{-29}{3}$$

Ответ: $A\left(\frac{-49}{6};-7\right),F\left(\frac{-20}{3};-7\right),d:x=\frac{-29}{3}$

Задача №4:

Привести уравнение поверхности к каноническому виду и указать название поверхности:

$$9x^2+4y^2+36z^2-18x+16y-11=0$$

Решение:

Так как уравнение не содержит произведений переменных, то для его преобразования к каноническому виду не требуется поворот осей, достаточно сделать параллельный перенос. Выделим полный квадрат:

$$9\left(x^2-2x+1\right)-9+4\left(y^2+4y+4\right)-16+36z^2-11=0$$

$$9(x-1)^2+4(y+2)^2+36z^2=36$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}+z^2=1$$

Получили каноническое уравнение эллипсоида, центр которого находится в точке $(-1;2;0)$.

Ответ: $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}+z^2=1$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**