ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **03** **Введение в математический анализ**

Тема № **06** **Пределы и непрерывность**

Практическое занятие № **12** **Предел последовательности**

Учебные вопросы:

1. Понятие предела последовательности
2. Задачи на предел последовательности

Литература.

1. Потапов А. П. Математический анализ. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: учебник и практикум для вузов, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/569097

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

Решение задач

Задача №1:

Используя определение предела последовательности, доказать, что:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+3} = 0$$

Решение:

По определению предела последовательности нужно доказать, что:

$$\lim_{n \to \infty} \text{¿}\ x_n = a \Leftrightarrow \{\varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in N : |x_n - a| < \varepsilon\, n > n_\varepsilon\}$$

Рассмотрим произвольную ε-окрестность точки $a=0$ и проверим, найдется ли номер – такой, что все члены с большими номерами окажутся внутри этой окрестности:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n+3} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n+3} \right| < \varepsilon$$

Чтобы показать существование искомого номера n_ε, выразим n через ε.

Так как при любом натуральном значении n верно, что $\frac{1}{n+3} > 0$, то знак модуля можно убрать:

$$\frac{1}{n+3} < \varepsilon$$

Преобразуем неравенства, учитывая, что ε и n положительны:

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+3$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 3$$

Поскольку слева речь идет о натуральных номерах, а правая часть в общем случае дробна, то нужно взять целую часть от нее:

$$n > \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3 \right]$$

При этом мы ничего не испортим. Например, если $n>2.35$ и мы ослабим результат в меньшую сторону до $n>2$, то ближайший подходящий номер («тройка») все равно будет удовлетворять первоначальному неравенству.

Таким образом, в качестве n_ε можно взять любое натуральное число, большее или равное $\left[\frac{1}{\varepsilon}-3\right]$.

Задача №2:

Используя определение предела последовательности, доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)=\frac{-1}{2}$$

Решение:

По определению последовательности нужно доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty} ¿\ x_n=a \Leftrightarrow \left\{\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon\in N:\left|x_n-a\right|<\varepsilon\, n>n_\varepsilon\right\}$$

Таким образом, нужно найти номера тех членов последовательности, для которых будет выполнено неравенство $\left|\sqrt{n^2-n}-n+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ при произвольном $\varepsilon>0$.

В данном случае процесс решения этого неравенства довольно трудоемкий, поэтому воспользуемся тем, что нам требуется найти какой-нибудь номер n_ε (не обязательно самый первый), такой, что при больших него значениях это неравенство будет выполнено. Поэтому оценим модуль, стоящий в неравенстве, следующим образом:

$$\left|\sqrt{n^2-n}-n+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{n^2-n}-n+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{n^2-n}+n-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n^2-n}+n-\frac{1}{2}}\right|= ¿$$

$$¿\left|\frac{\frac{-1}{4}}{\sqrt{n^2-n}+n-\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{4\sqrt{n^2-n}+4n-2}=\frac{1}{4\sqrt{n(n-1)}+4n-2}<\frac{1}{4\sqrt{(n-1)^2}+4n-2}=\frac{1}{8n-6}$$

Если найти номер n_ε, при котором последняя дробь будет меньше ε, то для него же будет выполнено и исходное неравенство. Решая неравенство $\frac{1}{8n-6}<\varepsilon$, получим $n>\frac{1}{8\varepsilon}+\frac{3}{4}$. Тогда в качестве n_ε можно взять любое натуральное число, большее или равное $\left[\frac{1}{8\varepsilon}+\frac{3}{4}\right]$.

Задача №3:

Используя определение предела последовательности, доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-26n+24}+n}=0$$

Решение:

По определению предела последовательности нужно доказать, что:

$$\lim_{n\to\infty} \text{¿}\ x_n=a \Leftrightarrow \{\varepsilon>0\,\exists n_\varepsilon\in N:|x_n-a|<\varepsilon\, n>n_\varepsilon\}$$

Решить неравенство технически довольно трудно, поэтому попытаемся оценить модуль данного выражения каким-нибудь другим более простым выражением, предел которого также будет равен нулю. Опять воспользуемся тем, что мы не ищем минимальное значение n_ε. Поэтому будем рассматривать $n>25$. Тогда $\sqrt[3]{n^2-26n+24}>0$ и, следовательно:

$$\left|\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-26n+24}+n}\right|<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-26n+24}+n}<\frac{1}{n}$$

Отсюда получается, что неравенство $\left|\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-26n+24}+n}\right|<\varepsilon$ выполнено при $n>1/\varepsilon$ (а значит и при $n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$) и одновременно $n>25$. Так как $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ не всегда больше 25, то n_ε выбирается как $n_\varepsilon=max\left(25,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$

Задача №4:

Доказать, что у последовательности $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ предела не существует.

Решение:

Доказывать будем от противного. Предположим, что у последовательности $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ существует предел и он равен a.

Если a – конечное число, то должно быть выполнено:

$$\lim \text{¿ } x_n=a \Leftrightarrow \{\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon \in N: |x_n-a|<\varepsilon\, n>n_\varepsilon\}$$

Возьмем $\varepsilon=1$, ему соответствует какое-то $N=n_\varepsilon$.

Рассмотрим x_{N+1} и x_{N+2}. Так как это два последовательных члена последовательности с $x_n=(-1)^n$, то одно из них -1, а другое 1. И для обоих из них (в силу выбранных номеров) выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Тогда:

$$\begin{cases} |-1-a|<1 \\ |1-a|<1 \end{cases}$$

Возведем оба неравенства в квадрат и сложим:

$$(-1)^2+2a+a^2+1^2-2a+a^2<2$$

$$2+2a^2<2$$

$$2a^2<0$$

Это неравенство не выполняется ни при каком a. Значит наше предположение о существовании конечного предела равного a – ошибочно.

Пусть же предел бесконечный. Тогда возможны три случая:

$$\lim \text{¿ } x_n=\infty \Leftrightarrow \{M>0\,\exists\, n_M \in N: |x_n|>M\, n>n_M\}$$

$$\lim \text{¿ } x_n=+\infty \Leftrightarrow \{M>0\,\exists\, n_M \in N: x_n>M\, n>n_M\}$$

$$\lim \text{¿ } x_n=-\infty \Leftrightarrow \{M>0\,\exists\, n_M \in N: x_n \leftarrow M\, n>n_M\}$$

В силу того, что члены последовательности принимают лишь значения -1 и 1, при выборе, например, $M=1$ все неравенства:

$$|x_n|>M,\, x_n>M,\, x_n \leftarrow M$$

не выполняются ни при каком n.

Отсюда получается, что предела у исследуемой последовательности не существует.

Разработал доцент
кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**