ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **03** **Введение в математический анализ**

Тема № **06** **Пределы и непрерывность**

Практическое занятие № **14** **Предел функции**

Учебные вопросы:

1. Понятие предела функции
2. Задачи на предел функции

Литература.

1. Потапов А. П. Математический анализ. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: учебник и практикум для вузов, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/569097

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

Решение задач

Задача №1:

Используя определение предела функции, доказать, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=1$$

Решение:

Алгоритм доказательства предела по определению на языке ε-δ:

1. Записываем определение на языке $\varepsilon-\delta$ с неравенствами под наш случай и данными из условия задачи.

2. Берем неравенство с $f(x)$ и ε, преобразуем его. Наша цель – получить новое неравенство:

- из которого следует исходное (т. е. в процессе преобразований мы можем исходное неравенство ослабить)

- которое еще и похоже по структуре на первое неравенство в определении (с x и δ).

Например, для случая конечного предела мы должны указать такое $¿>0$:

$$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|x-x_0|<¿\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon$$

3. Далее надо учесть сделанные предположения и записать δ. Если никаких ограничений на икс мы не ставили, то берем в качестве $\delta=¿$. Если такие были, то переписываем каждое в виде первого неравенства в определении и берем самую точную оценку из правых частей неравенств и $¿$.

Например, если предполагали, что $x_0-1<x<x_0+1$, то записываем это в виде $|x-x_0|<1$ и в качестве δ берем $min(1,*)$.

В данном примере у нас случай конечного предела:

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \Leftrightarrow \{\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0: x\in D_f, 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=1 \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0: x\in D_f, 0<|x|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-1\right|<\varepsilon$$

Преобразуем неравенство:

$$\left|\frac{x^2-1-(2x^2-x-1)}{2x^2-x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x(1-x)}{(x-1)(2x+1)}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x}{2x+1}\right|<\varepsilon$$

Так как $x \to 0$, то предположим, что оно мало: $\frac{-1}{4}<x<\frac{1}{4} \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{4}$.

Теперь нам будет легче оценить сверху $|x|$:

$$\frac{-1}{2}<2x<\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}<2x+1<\frac{3}{2} \Rightarrow |2x+1|>\frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{x}{2x+1}\right|<\frac{|x|}{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

$$|x|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Чтобы выполнить обе оценки берем наименьшую за δ: $\delta=min\left(\frac{\varepsilon}{2};\frac{1}{4}\right)$

Задача №2:

Используя определение предела функции, доказать, что:

$$\lim_{x\to 0} 3^{\frac{1}{x}} \text{ не существует}$$

Решение:

Здесь удобнее использовать определение на языке последовательностей. Из него следует, что, если показать, что разные последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$ приводят к разным значениям предела, то это значит, что он не существует.

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}\to 0$ и $\{x_n'\}=\{-\frac{1}{n}\}\to 0$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty} 3^n=+\infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{x_n'}}=\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n}=0$

Получили разные значения, значит $\lim\limits_{x\to 0} 3^{\frac{1}{x}}$ не существует

Задача №3:

Используя определение предела функции, доказать, что:

$$\frac{\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+2x}{x^2-3x+2}=-\infty$$

Решение:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0: x\leftarrow\frac{1}{\delta}\Rightarrow f(x)\leftarrow\frac{1}{\varepsilon}$$

Составим неравенство $\frac{x^3+2x}{x^2-3x+2}\leftarrow\frac{1}{\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ и попытаемся найти число $\delta>0$ такое, что для всех значений $x\leftarrow\frac{1}{\delta}$ это неравенство будет выполнено. Рассматривая только $x<0$, получим:

$$\frac{x^3+2x}{x^2-3x+2}=\frac{x(x^2+2)}{x^2-3x+2}$$

Распишем отдельно:

$$\frac{x^2+2}{x^2-3x+2}=1-3\vee x\vee\frac{¿}{x^2-3x+2}¿$$

Тогда (для $x<0$) выполняется неравенство:

$$3\vee x\vee\frac{¿}{x^2-3x+2}<3\vee x\vee\frac{¿}{x^2}<\frac{3}{¿x\vee¿¿}¿¿$$

Отсюда, если взять, например, $x \leftarrow 6$, то получим, что $3 \vee x \vee \frac{¿}{x^2-3x+2} < \frac{1}{2} ¿$.

Тогда $\frac{x^2+2}{x^2-3x+2} > \frac{1}{2}$ и, следовательно, для этих же значений x верно $\frac{x^3+2x}{x^2-3x+2} < \frac{x}{2} \leftarrow \frac{1}{2\delta}$.

$$\frac{-1}{2\delta} \leftarrow \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < \frac{1}{\delta}$$

Теперь, если положить $\frac{1}{\delta} = max\left(6, \frac{2}{\varepsilon}\right) \Longleftrightarrow \delta = \frac{1}{max\left(6, \frac{2}{\varepsilon}\right)}$, то для всех значений $x \leftarrow \frac{1}{\delta}$ неравенство $\frac{x^3+2x}{x^2-3x+2} \leftarrow \frac{1}{\varepsilon}$, будет тоже выполнено.

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**