ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **03** **Введение в математический анализ**

Тема № **06** **Пределы и непрерывность**

Практическое занятие № **15** **Предел функции**

Учебные вопросы:

1. Понятие предела функции
2. Задачи на предел функции

Литература.

1. Потапов А. П. Математический анализ. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: учебник и практикум для вузов, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/569097

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

Решение задач

Задача №1:

Найти предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$$

Решение:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=(*)$$

Разложим числитель на множители:

$$x^2+x-2=0$$

$$D=1+8=9,\sqrt{D}=3$$

$$x_1=\frac{-1-3}{2}=-2,x_2=\frac{-1+3}{2}=1,$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$(\text{¿})=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{x+6-4}=4\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\text{¿}=4\lim_{x\to -2}(x-$$

Ответ: -12

Задача №2:

Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tg\,x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Решение:

Внешний вид предела весьма напоминает второй замечательный предел и неопределенность подходящая, поэтому сводим к нему:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tg\,x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x+tg\,x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1+\sin x}{tg\,x-\sin x}}\right)^{\frac{1+\sin x}{tg\,x-\sin x}\cdot\frac{(tg\,x-\sin x)}{(1+\sin x)\sin x}}=\text{¿}\,\text{¿}$$

$$¿\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1+\sin x}{tg\,x-\sin x}}\right)^{\frac{1+\sin x}{tg\,x-\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}}=¿$$

$$¿\lim_{x\to 0} e^{\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}}=e^{0}=1$$

Ответ: 1

Задача №3:

Найти предел:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} ctg\,2x\cdot ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

Решение:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} ctg\,2x\cdot ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=[0\cdot\infty]=(*)$$

Здесь стоит перейти к новой переменной $t=\frac{\pi}{4}-x$. При $x\to\frac{\pi}{4}$ новая переменная $t\to 0$. Получим теперь:

$$(¿)=\lim_{t\to 0} ctg\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\cdot ctg\,t=\left[ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\,\alpha\right]=\lim_{t\to 0} tg\,2t\cdot ctg\,t=¿$$

$$¿\lim_{t\to 0}\frac{tg\,2t}{tg\,t}=[tg\,\alpha\quad\alpha,\alpha\to 0]=¿\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t}=\frac{2}{1}=2$$

Ответ: 2

Задача №4:

Найти предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\,\pi x}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\,\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}t=x-1 & x=t+1\\ x\to 1 & t\to 0\end{matrix}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3^{5(t+1)-3}-3^{2(t+1)^2}}{tg(\pi t+\pi)}=¿$$

$$¿\lim_{t\to 0}\frac{3^{5t+2}-3^{2t^2+4t+2}}{tg(\pi t+\pi)}\underset{tg(\pi+\alpha)=tg\,\alpha}{=}3^2\lim_{t\to 0}\frac{(3^{5t}-1)-(3^{2t^2+4t}-1)}{tg\,\pi t}=¿$$

$$\underset{\substack{tg\alpha \quad \alpha \\ b^{\alpha}-1 \quad \alpha \ln b}}{¿}\ 9\lim_{t\to 0}\frac{(5t)\ln 3-(2t^{2}+4t)\ln 3}{\pi t}=¿$$

$$¿\frac{9\ln 3}{\pi}\lim_{t\to 0}5-2t-4=\frac{9\ln 3}{\pi}$$

Ответ: $\frac{9\ln 3}{\pi}$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**