ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **03** **Введение в математический анализ**

Тема № **06** **Пределы и непрерывность**

Практическое занятие № **16** **Непрерывность функции**

Учебные вопросы:

1. Понятие непрерывности функции в точке
2. Классификация точек разрыва

Литература.

1. Потапов А. П. Математический анализ. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: учебник и практикум для вузов, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/569097

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

Решение задач

Задача №1:

Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность и определить тип точек разрыв:

$$f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$$

Решение:

Данная функция является элементарной и определена везде, кроме точки $x_1=0$. Поэтому точка $x_1=0$ - точка разрыва функции.

Определим тип этой точки. Для этого найдем односторонние пределы данной функции при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}}=-\infty$$

Тогда:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=-1$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=1$$

Значит, $x_1=0$ - точка разрыва первого рода

Ответ: непрерывна везде, кроме точки 0, где разрыв первого рода.

Задача №2:

Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность и определить тип точек разрыв:

$$f(x)=\frac{1}{\ln x^2}$$

Решение:

Функция не определена в точках $x_{1,2}=\pm 1$, $x_3=0$. Во всех других точках функция непрерывна.

Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, то точка $x_3=0$ является точкой

устранимого разрыва.

Рассмотрим точки $x_{1,2}$, в них:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Из этого следует, что там разрыв второго рода.

Ответ: непрерывна везде, кроме точки 0, где устранимый разрыв и точек ± 1, где разрыв второго рода.

Задача №3:

Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность и определить тип точек разрыв:

$$f(x) = 3x + \sin \frac{1}{x-1}$$

Решение:

Функция непрерывна в любой точке вещественной прямой, кроме точки $x_1 = 0$, где она не определена.

Так как пределы $\lim_{x \to 1+0} f(x)$ и $\lim_{x \to 1-0} f(x)$ не существуют, то эта точка является точкой разрыва второго рода

Ответ: непрерывна везде, кроме точки 0, где разрыв второго рода.

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**