ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Раздел № **04** **Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

Тема **№ 07** **Дифференцируемость функции**

Практическое занятие № **18 Вычисление производных и дифференциалов**

Учебные вопросы:

1. Производная сложной функции
2. Производная параметрической и заданной неявно функций
3. Дифференциал функции

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 2. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

Решение задач

Задача 1. Найти производную и дифференциал функции

$$y=ar\,c\,ctg^2\ln\left(c\,tg\,2x\right)$$

$$y'=\left(ar\,c\,ctg^2\ln\left(c\,tg\,x\right)\right)'=2\,ar\,c\,ctg\left(\ln\left(c\,tg\,2x\right)\right)\cdot\frac{-1}{1+\ln^2 c\,tg\,2x}\cdot\frac{1}{c\,tg\,2x}\cdot\frac{-2}{s\in¿^2 2x¿}$$

$$d\,y=y'\,dx=4\,ar\,c\,ctg\left(\ln\left(c\,tg\,x\right)\right)\cdot\frac{1}{1+\ln^2 c\,tg\,x}\cdot\frac{1}{c\,tg\,x}\cdot\frac{1}{s\in¿^2 x\,dx¿}$$

Задача 2. Найти производную функции $xy=arc\,c\,tg\frac{x}{y}$

Формулы: $F\left(x,y\right)=0-¿$ неявное задание функции $y\left(x\right)\Longrightarrow\left(F\left(x,y\right)\right)'=\left(0\right)'$

Продифференцируем почленно по *x* равенство $xy=arc\,c\,tg\frac{x}{y}$:

$$\left(xy\right)'=\left(arc\,c\,tg\frac{x}{y}\right)';\,1\cdot y+x\cdot y'=\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)';$$

$$y+x\cdot y'=\frac{-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1\cdot y-x\cdot y'}{y^2}\Longrightarrow\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(y+x\cdot y'\right)=x\cdot y'-y$$

$$\left(x^2+y^2\right)\cdot x\cdot y'-x\cdot y'=-y-\left(x^2+y^2\right)\cdot y\Longrightarrow$$

$$\left(x^2+y^2-1\right)\cdot x\cdot y'=-y\left(x^2+y^2+1\right)\Longrightarrow y'=\frac{y\cdot\left(x^2+y^2+1\right)}{x\cdot\left(1-x^2-y^2\right)}$$

Задача 3. Найти производную функции

$$\begin{cases}x=t-s\in t\\ y=1-co\,s\,t\end{cases}$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(1-co\,s\,t\right)'_t}{\left(t-s\in t\right)'_t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=ctg\frac{t}{2}$$

Задача 4. Найти производную и дифференциал функции $y=\left(\cos x\right)^{\sin x}$

Прологарифмируем почленно равенство $y=(\cos x)^{\sin x}$

$\ln y=ln(\cos x)^{\sin x} \Longrightarrow \ln y=s\in x\cdot\ln(\cos x)$

Продифференцируем почленно по x равенство $\ln y=s\in x\cdot\ln(\cos x)$:

$$\frac{y'}{y}=(s\in x\cdot\ln(\cos x))' \Longrightarrow \frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln(\cos x)+\sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x} \Longrightarrow$$

$$y'=(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$$

$$d\,y=y'\cdot dx=(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)dx$$

Задача 5. Найти производную функции

$$y=\frac{(x^3+2)\cdot\sqrt[4]{2x-5}\cdot c\,tg\,x}{\sqrt[7]{(x+2)^5}\cdot(3x-7)^8}$$

Прологарифмируем почленно равенство $y=\frac{(x^3+2)\cdot\sqrt[4]{2x-5}\cdot c\,tg\,x}{\sqrt[7]{(x+2)^5}\cdot(3x-7)^8}$

$$\ln y=ln\frac{(x^3+2)\cdot\sqrt[4]{2x-5}\cdot c\,tg\,x}{\sqrt[7]{(x+2)^5}\cdot(3x-7)^8}$$

Продифференцируем почленно по x равенство $\ln y=ln\frac{(x^3+2)\cdot\sqrt[4]{2x-5}\cdot c\,tg\,x}{\sqrt[7]{(x+2)^5}\cdot(3x-7)^8}$:

$$\ln y=ln(x^3+2)+\frac{1}{4}\cdot\ln(2x-5)+\ln(c\,tg\,x)-\frac{5}{7}\cdot\ln(x+2)-8\ln(3x-7) \Longrightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3x^2}{x^3+2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2x-5}-\frac{1}{\cos x\cdot\sin x}-\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{x+2}-8\frac{3}{3x-7} \Longrightarrow$$

$$y'=\frac{(x^3+2)\cdot\sqrt[4]{2x-5}\cdot c\,tg\,x}{\sqrt[7]{(x+2)^5}\cdot(3x-7)^8}\cdot\left(\frac{3x^2}{x^3+2}+\frac{1}{2(2x-5)}-\frac{2}{\sin 2x}-\frac{5}{7(x+2)}-\frac{24}{3x-7}\right)$$

Задача 6. Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$, проведенной в точке, для которой $t_0=4$.

Формулы: $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)-¿$ уравнение касательной к графику $y(x)$ функции в точке $(x_0;y(x_0))$

$y-y(x_0)=\frac{-1}{y'(x_0)}(x-x_0)-$¿ уравнение нормали к графику $y(x)$функции в точке $(x_0;y(x_0))$

$x_0=x(t_0)=4^2=16$

$y(x_0)=y(t_0)=4^3=64$

$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(t^3)'_t}{(t^2)'_t}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3t}{2}\Longrightarrow y'(x_0)=y'_x(t_0)=\frac{3\cdot 4}{2}=6$

$y-64=6\cdot(x-16)\Longrightarrow 6x-y-32=0-$¿ уравнение касательной

$y-64=\frac{-1}{6}\cdot(x-16)\Longrightarrow x+6y-400=0-$¿ уравнение нормали

Задача 7. Вычислить приближенно значение $(2{,}01)^3$, используя приближенное равенство $\Delta y\approx d y$.

Формулы: $\Delta y=y(x)-y(x_0)\Longrightarrow y(x)=\Delta y+y(x_0)\Longrightarrow$

$y(x)\approx d y+y(x_0)$, где $d y=y'(x_0)\cdot\Delta x=y'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$y=x^3, x=2{,}01, x_0=2\Longrightarrow \Delta x=x-x_0=0{,}01$

$y(x_0)=(x_0)^3=2^3=8$

$dy=y'\cdot dx=y'\cdot\Delta x=3x^2\cdot\Delta x=3\cdot 2^2\cdot 0{,}01=12\cdot 0{,}01$

$y(x)\approx d y+8\Longrightarrow \quad (2{,}01)^3\approx 12\cdot 0{,}01+8=8{,}12$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Л.А. Иванова**