



Раздел № 04 **Дифференциальное исчисление функций
одной переменной**

Тема № 07 **Дифференцируемость функции**

Практическое занятие № 19 Правило Лопиталья

Учебные вопросы:

1. Правило Лопиталя для вычисления пределов, имеющих

неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

2. Другие виды неопределенностей $[0 \cdot \infty]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$, $[\infty - \infty]$

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 2. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

Решение задач

Задача 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

Важно помнить, что если не существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то применение правила Лопиталя может привести к ошибочному выводу.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\left. \begin{aligned} x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n \rightarrow \infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)} = 1 \\ x_n = 2\pi n \rightarrow \infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 2\pi n}{1 + \cos 2\pi n} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} \Rightarrow$$

Правило Лопиталя применять нельзя

Другой способ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Задача 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\text{по правилу Лопиталя}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x - \operatorname{tg} x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos^{-3} x \cdot (-\sin x)} = \frac{-1}{2}$$

Задача 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin x^2}{\sin x - \operatorname{tg} x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin x^2}{\sin x - \operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\text{в числителе заменим на эквивалентные}] =$$

$$\textcolor{red}{\text{!}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - \operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\text{по правилу Лопиталя}] = \textcolor{red}{\text{!}}$$

$$\textcolor{red}{\text{!}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{-\sin x + 2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x)} = \textcolor{red}{\text{!}}$$

$$\textcolor{red}{\text{!}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{-\sin x (1 + 2\cos^{-3} x)} = [\text{в знаменателе замением на эквивалентные}]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{-x(1 + 2\cos^{-3} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{-(1 + 2\cos^{-3} x)} = \frac{6}{-3} = -2$$

Задача 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = [0^0] = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x} = \textcolor{red}{\text{!}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = [\text{по правилу Лопиталя}] = \textcolor{red}{\text{!}} \textcolor{red}{\text{!}}$$

$$\textcolor{red}{\text{!}} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{-x} = 0$$

$$\textcolor{red}{\text{!}} e^0 = 1$$

Задача 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = [\infty^0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \sqrt[x]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(x)^{\frac{1}{x}}} = \textcolor{red}{\text{!}} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = \textcolor{red}{\text{!}} \textcolor{red}{\text{!}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = [\text{по правилу Лопиталя}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 0$$

$$\textcolor{red}{\text{!}} e^0 = 1$$

Задача 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\sin x} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x \cdot \sin x} = \textcolor{red}{\text{!}}$$

$$\textcolor{red}{\text{!}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = [\text{по правилу Лопиталя}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x^2}}{2x} = \textcolor{red}{\text{!}}$$

$$\textcolor{red}{\wr} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) \cos x - 1}{2x \underbrace{(1+x^2)}_{\searrow 1}} = \frac{1}{1 \cdot 2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) \cos x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \textcolor{red}{\wr}$$

$$\textcolor{red}{\wr} [\textit{по правилу Лопиталя}] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2x \cos x - x^2 \sin x}{1} = 0$$

Разработал доцент

кафедры высшей математики

Л.А. Иванова