Раздел № **04** **Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

Тема № 07 Дифференцируемость функции

Практическое занятие № **20** **Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.**

Учебные вопросы:

1. Производные и дифференциалы высших порядков
2. Формула Тейлора для многочлена и для произвольной функции
3. Приложения формулы Тейлора для произвольной

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель
2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс
3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 2. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

Решение задач

Задача 1. Найти производную дифференциал третьего порядка функции

$y(x)=4x^3-12x+7$

Формула: $d^3y=y'''(x)dx^3$

Найдем третью производную заданной функции:

$y'=12x^2-24x\,;\,y''=24x\,;\,y'''=24$

Тогда $d^3y=24dx^3$

Задача 2. Вычислить производные и дифференциалы порядка *n* от функций:

1) $y=e^x$, 2) $y=\sin x$, 3) $y=x^k$, 4) $y=\ln x$

Формулы: $y''=(y')'\,;\,y'''=(y'')'\,;\ldots,y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$

$$d^2y=y''dx^2;d^3y=y'''dx^3;\ldots;d^ny=y^{(n)}dx^n$$

1) $y=e^x$, $y'=e^x$, , $y''=e^x$, ….., $(e^x)^{(n)}=e^x;d^ny=e^xdx^n$

2) $y=\sin x$ $\quad y^{IV}=\sin x$ $\quad\ldots\ldots$

$y'=\cos x$ $\quad y^{(5)}=\cos x$ $\quad\ldots\ldots.$

$y''=\cos x$ $\quad y^{(6)}=-\sin x$ $\quad y^{(214)}=y''=-\sin x$

$y'''=-\cos x$ $\quad y^{(7)}=-\cos x$

Используя метод математической индукции, можно вывести формулу:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$d^ny=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)dx^n$$

Аналогично (самостоятельно) можно вывести формулу:

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$d^n y=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)d x^n$$

3) $y=x^k, k \in N$

$$y'=kx^{k-1}$$

$$y''=k(k-1)x^{k-2}$$

$$y'''=k(k-1)(k-2)x^{k-3}$$

……………………………….

Возможны 3 случая:

$k<n \Longrightarrow \quad (x^k)^{(n)}=0; \quad d^n y=0$

$k>n \Longrightarrow (x^k)^{(n)}=k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))(x^k)^{n-k}$

$$d^n y=k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))(x^k)^{n-k}d x^n$$

$k=n \Longrightarrow (x^n)^{(n)}=n!; \quad d^n y=n!\,d x^n$

4) $y=\ln x$

$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

$$y''=(-1)x^{-2}$$

$$y'''=(-1)(-2)x^{-3}$$

$$y^{IV}=(-1)(-2))(-3)x^{-4}$$

……………………….

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\ldots(-n+1)x^{-n}$$

Используя метод математической индукции, можно вывести формулу:

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$d^n y=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}d x^n$$

Задача 3. Вычислить производную и дифференциал порядка *n* от функции

$$y=x^2\sin x$$

Применим формулу Лейбница:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+u v^{(n)}$$

$$u(x)=\sin x\,;\,v(x)=x^2$$

$$u^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$v'(x)=2x\,;\,v''(x)=2\,;\,v'''(x)=0\,;\ldots,v^{(k)}(x)=0\,,\text{если}\,k>2$$

$$C_n^1=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n\,;\,C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$y^{(n)}=\left(\sin x\cdot x^2\right)^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''=\text{¿}$$

$$\text{¿}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot x^2+n\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\cdot 2x+\text{¿}$$

$$\frac{+n(n-1)}{2}\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)\cdot 2=\text{¿}$$

$$\text{¿}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot x^2+2nx\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

$$d^n y=\left(\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\cdot x^2+2nx\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)\right)d x^n$$

Задача 4. Вычислить производную третьего порядков от функции, заданной параметрически $\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases} t\in[0,2\pi]$

Формулы: $y'_x(x_0)=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$ $\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ $\quad y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{R\cos t}{-R\sin t}=-ctg\,t$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{(-ctg\,t)'_t}{x'_t}=\frac{1}{\sin^2 t(-R\sin t)}=\frac{1}{-R\sin^3 t}$$

$$y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{-1}{R}\sin^{-3}t\right)'_t}{-R\sin t}=\frac{-3\sin^{-4}t\cos t}{R^2\sin t}=\frac{-3}{R^2}\cdot\frac{\cos t}{\sin^5 t}$$

Задача 5. Вычислить производную третьего порядка от функции, заданной неявно $x^2+y^2=4$.

Формулы: $F(x,y)=0-¿$ неявное задание функции $y(x)$

$$\frac{d}{dx}F(x,y)=0;\frac{d^2}{dx^2}F(x,y)=0;\ldots\ldots;\frac{d^n}{dx^n}F(x,y)=0$$

Продифференцируем почленно равенство $x^2+y^2=4$:

$$(x^2+y^2)'=(4)'\Longrightarrow\quad 2x+2y\cdot y'=0\Longrightarrow$$

$$y'=\frac{-x}{y}$$

Продифференцируем почленно равенство: $2x+2y\cdot y'=0$

$$(2x+2y\cdot y')'=(0)'\Longrightarrow 2+2(y'\cdot y'+y\cdot y'')=0\Longrightarrow$$

$$1+y'\cdot y'+y\cdot y''=0\Longrightarrow$$

$$y''=\frac{-1+y'\cdot y'}{y}=\frac{-1+\left(\frac{-x}{y}\right)^2}{y}=\frac{-x^2+y^2}{y^3}=\frac{-4}{y^3}$$

Продифференцируем почленно равенство: $1+y'\cdot y'+y\cdot y''=0$

$$(1+(y')^2+y\cdot y'')'=(0)'\Longrightarrow 2y'\cdot y''+y'\cdot y''+y\cdot y'''=0\Longrightarrow$$

$$y'''=\frac{-3y'\cdot y''}{y}=-3\frac{\left(\frac{-x}{y}\right)\left(\frac{-4}{y^3}\right)}{y}=-12\frac{x}{y^5}$$

Задача 6. Найти дифференциал второго порядка сложной функции

$$f(y)=\sqrt[3]{y},\quad \text{где } y=4x+5$$

Формула: $d^2 f = f''(y)\, d y^2 + f'(y)\, d^2 y$

$f'(y) = \left(y^{1/3}\right)' = \frac{1}{3} y^{-2/3};\ f''(y) = \frac{-2}{9} y^{-5/3}$

$d y = 4\, dx;\ d^2 y = 0 \cdot d x^2 = 0$

Тогда

$$d^2 f = \frac{-2}{9} y^{\frac{-5}{3}} d y^2 + \frac{1}{3} y^{\frac{-2}{3}} d^2 y = \frac{-2}{9} y^{\frac{-5}{3}} (4\, dx)^2 + \frac{1}{3} y^{\frac{-2}{3}} \cdot 0 =$$ ¿

¿ $$-\frac{32}{9} y^{\frac{-5}{3}} dx^2 = \frac{-32}{9} (4x+5)^{\frac{-5}{3}} dx^2$$

Задача 7. Разложить по степеням $(x-1)$ многочлен

$$P_3(x) = x^3 + 4x^2 - x + 5$$

Воспользуемся формулой Тейлора для многочлена

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{P'''_n(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ где\ x_0 = 1$$

$P_3(1) = 9$

$P'_3(x) = 3x^2 + 8x - 1 \quad \Longrightarrow \quad P'_3(1) = 10$

$P''_3(x) = 6x + 8 \Longrightarrow P''_3(1) = 14$

$P'''_3(x) = 6$

$$P_3(x) = x^3 + 4x^2 - x + 5 = 9 + \frac{10}{1!}(x-1) + \frac{14}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 \Longrightarrow$$

$$P_3(x) = x^3 + 4x^2 - x + 5 = 9 + 10(x-1) + 7(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Задача 8. Разложить по формуле Маклорена функции

$$1)\, e^{2x}, \quad 2)\ \sin x^2 x, \quad 3)\ \frac{1}{1-x}.$$

1) Формула: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$

$$e^{2x}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2x)^n}{n!}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}x^k+o(x^n)$$

2) Формула: $\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})$

$$\sin x^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})=¿$$

$$¿\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{4^k\cdot x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})$$

3) Формула: $(1+x)^{\mu}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-(k-1))}{k!}x^k+o(x^n)$

$\mu=-1:$

$$\frac{1}{1-x}=(1+(-x))^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$$

Задача 9. Вычислить число e с точностью до 0,001

Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$ и запишем для нее формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, где точка ξ лежит между xи x_0

$$x=1:\ e=e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(1)$$

$$R_n(1)=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}1^{n+1},0<\xi<1$$

$e<3\Longrightarrow R_n(1)\vee ¿\frac{3}{(n+1)!}\Longrightarrow\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{1000}$ выполняется при $n=6$

$$e\approx=1+\frac{1}{1!}+\frac{1^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^3}{5!}+\frac{x^3}{6!}=2{,}7180(5)$$

Задача 10. *Вычислить* $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

Формулы: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 2x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) - 2x + o\left(x^3\right) = \text{¿}$$

$$\text{¿} \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

$$g(x) = x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + o\left(x^3\right) = \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)} = 2$$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Л.А. Иванова**