Раздел № **04** **Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

Тема № **08** **Исследование функций**

Практическое занятие № **22** **Исследование функций с помощью производных. Построение графика функции**

Учебные вопросы:

1. Исследование на монотонность
2. Исследование на экстремумы
3. Исследование на выпуклость
4. Точки перегиба функции
5. Построение графиков функций

Литература.

1. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, 2007, М.: Аст, Астрель

2. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа, 2014, М.: Альянс

3. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Часть 2. Учебник и практикум для академического бакалавриата, 2017, М.: Юрайт

4. Иванова Л. А., Шахно В.К. Исследование функции одной переменной и построение графика. Индивидуальное домашнее задание [Электронный ресурс]: учебное пособие /Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.— Санкт-Петербург, 2019. —:http://elib.spbstu.ru/dl/2/s19-35.pdf. — http://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s19-35

Решение задач

Задача 1. Провести полное исследование функции и построить ее график.

$$y=\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$$

1. Область определения:

$$D_f=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

2.Четность, нечетность и периодичность функции.

Функция не является периодической.

Функция нечетная, т.к. ее область определения симметрична относительно начала координат и выполняется равенство

$$y(-x)=\frac{-4x^3+3x}{4x^2-1}=\frac{-4x^3-3x}{4x^2-1}=-y(x)$$

3. Поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=+\infty$$

4. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Рассмотрим точки $x=\pm\frac{1}{2}$ и вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}\pm0}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=\text{¿}\lim_{x\to-\frac{1}{2}\pm0}\frac{4x\left(x^2-\frac{3}{4}\right)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\text{¿¿¿}$$

$$¿\lim_{x\to -\frac{1}{2}\pm 0}\frac{4x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=¿¿$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}\pm 0}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=\frac{\lim_{x\to -\frac{1}{2}\pm 0}4x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=¿¿$$

Следовательно, точки $x=\pm 1/2$ $-¿$ точки разрыва 2 рода

Таким образом прямые $x=1/2$ и $x=-1/2$ являются вертикальными

асимптотами графика функции.

5. Наклонные асимптоты.

Наклонные асимптоты удовлетворяют равенству: : $y=kx+b$

Найдем коэффициенты kи b по формулам:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)$$

Вычислим эти пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3-3x}{(4x^2-1)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-3}{4x^2-1}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{4x^2-1}=0.$$

Таким образом, прямая $y=x$ – наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

6. Интервалы возрастания и убывания. Точки экстремума.

$$y' = \frac{(12x^2-3)(4x^2-1)-(4x^3-3)8x}{(4x^2-1)^2} = ¿$$

$$¿ \frac{48x^4-12x^2-12x^2+3-32x^4+24x^2}{(4x^2-1)^2} = \frac{16x^4+3}{(4x^2-1)^2}$$

Отсюда следует, что $y' \neq 0 \quad \forall x \in D_f(x)$; $\quad y'$ не существует при $x = \pm 1/2$.

Таким образом, функция возрастает при $x \in (-\infty; -1/2); (-1/2; 1/2); (1/2; +\infty)$.

Точек экстремума нет.

7. Интервалы выпуклости кривой. Точки перегиба.

$$y'' = \frac{64x^3(4x^2-1)^2-(16x^4+3)\cdot 2\cdot(4x^2-1)\cdot 8x}{(4x^2-1)^4} = ¿$$

$$¿ \frac{8x(4x^2-1)(8x^2(4x^2-1)-2(16x^4+3))}{(4x^2-1)^4} = ¿$$

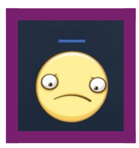
$$¿ \frac{8x(8x^2(4x^2-1)-2(16x^4+3))}{(4x^2-1)^3} = \frac{8x(32x^4-8x^2-32x^4-6)}{(4x^2-1)^3} = ¿$$

$$¿ \frac{-16x(4x^2+3)}{(4x^2-1)^3}$$

Отсюда следует, что $y'' = 0$ при $x = 0$; $\quad y''$ не существует при $x = \pm\frac{1}{2}$.

Таким образом:

$-¿$ кривая выпукла вниз при $x \in (-\infty; -0{,}5); (0; 0{,}5)$: $y'' > 0$;



$-¿$ кривая выпукла вверх при $x \in (-0{,}5; 0); (0{,}5; +\infty)$: $y'' < 0$;

Следовательно, точка $(0;0)$ – точка перегиба графика функции.

8. Таблица

Так, как функция нечетная, то можно рассмотреть только промежуток $[0;+\infty)$.

x	0	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$		$\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$
			$\frac{1}{2}-0$	$\frac{1}{2}+0$	
y	0	$+¿$	$+\infty$	$-\infty$	$(-\infty;+\infty)$
y'	$+¿$	$+¿$	$\nexists$		$+¿$
y''	0	$+¿$	$\nexists$		$-¿$
Γ_f					
	точка перегиба	возрастает выпука вниз	разрыв второго рода		возрастает выпука вверх

Таблица 1

9. Точки пересечения с осями координат.

Точки пересечения графика с осями координат - $(0;0)$ и $(\pm\sqrt{3}/2;0)$

10. График.

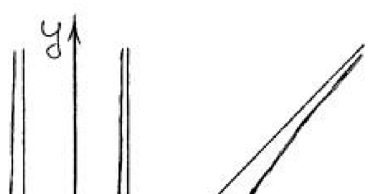


Рис.1

Задача 2. Провести полное исследование функции и построить ее график.

$$y=\frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

1. Область определения:

$$D_f=(-\infty;1)\cup(1;+\infty).$$

2. Четность, нечетность и периодичность функции.

Функция не является периодической.

Функция ни четна, ни нечетна, т.к. ее область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1.$$

4. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Рассмотрим точку $x=1$ и вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty .$$

Следовательно, точка $x=1$ $-$¿ это точка разрыва 2 рода.

Таким образом, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

5. Наклонные асимптоты.

Наклонные асимптоты удовлетворяют равенству: $y=kx+b$

Найдем коэффициенты kи b по формулам:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)$$

Вычислим эти пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{(x-1)^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1.$$

Таким образом, прямая $y=1$ – наклонная (горизонтальная) асимптота

при $x\to\pm\infty$.

6. Интервалы возрастания и убывания. Точки экстремума.

$$y'=\frac{2x(x-1)^2-x^2\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x^2-x-x^2)}{(x-1)^3}=\frac{-2x}{(x-1)^3}.$$

Отсюда следует, что $y'=0$ при $x=0$; y' не существует при $x=1$

$-$¿ функция убывает при $x\in(-\infty;0);(1;+\infty)$

$-¿$ функция возрастает при $x\in(0;1)$

$-¿$ точка $(0;0)$ – точка локального гладкого минимума.

7. Интервалы выпуклости кривой. Точки перегиба.

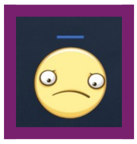
$$y''=\left(\frac{-2x}{(x-1)^3}\right)'=\frac{-2\left((x-1)^3-x\cdot 3(x-1)^2\right)}{(x-1)^6}=\frac{-2(x-1-3x)}{(x-1)^4}=¿$$

$$¿\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

Отсюда следует, что $y''=0$ при $x=-0{,}5$; y'' не существует при $x=1$.

Таким образом:

$-¿$ кривая выпукла вверх при $x\in(-\infty;-0{,}5)$: $y''<0$



$-¿$ кривая выпукла вниз при $x\in(-0{,}5;1)$: $y''>0$;

$-¿$ кривая выпукла вниз при $x\in(1;+\infty)$: $y''>0$;

Следовательно, точка $\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{9}\right)$ – точка перегиба графика функции.

8. Таблица

x				0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$.

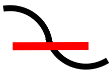
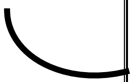
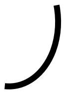
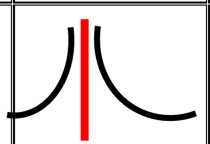
						$1-0$	$1+0$	
y	$+¿$	$\frac{1}{9}$	$+¿$	0	$+¿$	$+\infty$	$+\infty$	$+¿$
y'	$-¿$	$-¿$	$-¿$	0	$+¿$	$\nexists$		$-¿$
y''	$-¿$	0	$+¿$	$+¿$	$+¿$	$\nexists$		$+¿$
Γ_f								
	убывает выпука вверх	Точка перегиба	убывает выпука вниз	Гладкий локальный экстремум (минимум)	Возрастает выпука вниз	Разрыв второго рода		убывает выпука вниз

Таблица 2

9. Точки пересечения с осями координат.

Точка пересечения графика с осями координат - точка $(0;0)$.

10. График.

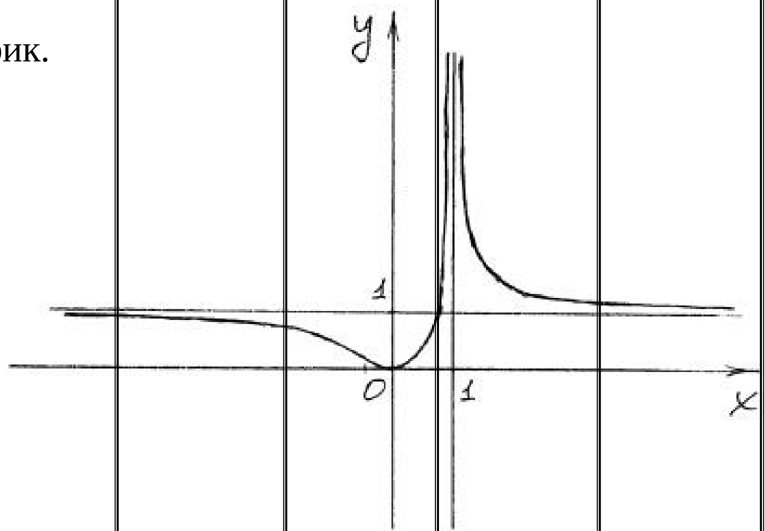


Рис.2

Задача 3. Провести полное исследование функций и построить их графики

$$y=-(x+1)e^{x+2}$$

1. Область определения:

$$D_f=(-\infty;+\infty).$$

2. Четность, нечетность и периодичность функции.

Функция общего вида, т.к. $y(-x)=(x+1)e^{-x+2}\neq\pm y(x)$

Функция не является периодической.

3. Поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to-\infty}-(x+1)e^{x+2}=\frac{\lim_{x\to-\infty}-(x+1)}{e^{-(x+2)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=[\text{по правилу Лопиталя}]=¿¿$$

$$¿\frac{\lim_{x\to-\infty}-1}{-e^{-(x+2)}}=\frac{\lim_{x\to-\infty}1}{e^{-(x+2)}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}-(x+1)e^{x+2}=-\infty$$

4. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Вертикальные асимптоты отсутствуют, т.к. функция всюду непрерывна.

5. Наклонные асимптоты

Наклонные асимптоты удовлетворяют равенству: $y=kx+b$

Найдем коэффициенты kи b по формулам:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)$$

Вычислим эти пределы:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(x+1)e^{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot e^{x+2}=-\infty$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ **наклонной асимптоты нет**.

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-(x+1)e^{x+2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-(x+1)}{x \cdot e^{-(x+2)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^{-(x+2)}} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k \cdot x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-(x+1)e^{x+2} - 0 \cdot x\right) = ¿$$

$$¿ \lim_{x \to -\infty} -(x+1)e^{x+2} = 0.$$

Таким образом, прямая $y=0$ – наклонная (горизонтальная) асимптота

при $x \to -\infty$.

6. Интервалы возрастания и убывания. Точки экстремума.

$$y' = -1 \cdot e^{x+2} - (x+1)e^{x+2} = -(x+2)e^{x+2}.$$

Отсюда следует, что $y'=0$ при $x=-2$.

Таким образом:

$-$¿ функция возрастает при $x \in (-\infty; -2)$

$-$¿ функция убывает при $x \in (-2; +\infty)$

$-$¿ точка $(-2; 1)$ – точка минимума.

7. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Точки перегиба.

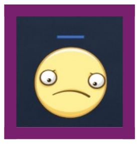
$$y'' = \left(-(x+2)e^{x+2}\right)' = -1 \cdot e^{x+2} - (x+2)e^{x+2} = -(x+3)e^{x+2}.$$

Отсюда следует, что $y''=0$ при $x=-3$;

Таким образом:

$-¿$ кривая выпукла вниз при $x \in (-\infty; -3)$: $y'' > 0$;

$-¿$ кривая выпукла вверх при $x \in (-3; +\infty)$: $y'' < 0$.



Следовательно, точка $\left(-3; \frac{2}{e}\right)$ – точка перегиба графика функции.

8. Таблица

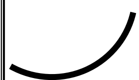
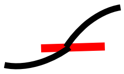
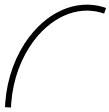
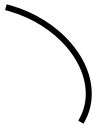
x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
y	$+¿$	$+¿$	$+¿$	1	$¿1$
y'	$+¿$	$+¿$	$+¿$	0	$-¿$
y''	$+¿$	0	$-¿$	$-¿$	$-¿$
Γ_f					
	возрастает выпука вниз	точка перегиба	возрастает выпука вверх	локальный гладкий экстремум (максимум)	убывает выпука вверх

Таблица 3

9. Точки пересечения с осями координат.

Точки пересечения графика с осями координат - точки $(-1; 0)$ и $(0; -e^2)$.

10. График

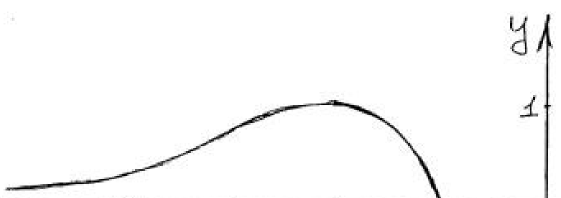


Рис.3

Задача 4. Провести полное исследование функции и построить ее график.

$$y=\sqrt[3]{x(x+3)^2}.$$

1. Область определения.

$D_f=(-\infty;+\infty)$2. Четность, нечетность и периодичность функции.

Функция не является периодической.

Функция ни четна, ни нечетна, т.к.

$$y(-x)=\sqrt[3]{-x(-x+3)^2}=-\sqrt[3]{x(3-x)^2}\neq\pm y(x).$$

3. Поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x(x-3)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x(x-3)^2}=+\infty$$

4. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Вертикальные асимптоты отсутствуют, т.к. функция всюду непрерывна.

5. Наклонные асимптоты.

Наклонные асимптоты удовлетворяют равенству: $y=kx+b$

Найдем коэффициенты kи b по формулам:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)$$

Вычислим эти пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{1\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}{x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x(x+3)^2}-1\cdot x\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x+3)^2-x^3}{\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}+x\sqrt[3]{x(x+3)^2}+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2+9x}{\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}+x\cdot\sqrt[3]{x(x+3)^2}+x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\cdot(6+9/x)}{x^2\cdot(\sqrt[3]{(1+3/x)^4}+\sqrt[3]{(1+3/x)^2}+1}=\frac{6}{1+1+1}=2$$

Таким образом, прямая $y=x+2$ – наклонная (горизонтальная) асимптота

при $x\to\pm\infty$.

6. Интервалы возрастания и убывания. Точки экстремума.

$$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot(x+3)^2+x\cdot 2(x+3)}{\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2+12x+9}{\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}}=\frac{x^2+6x+3}{\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{(x+3)(x+1)}{\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}}=\frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2(x+3)}}.$$

Отсюда следует, что $y'=0$ при $x=-1$; y' не существует при $x=0$ и $x=-3$

(при этом сама функция $y(x)$ определена для любых $x\in(-\infty;+\infty)$).

Таким образом:

$-$¿ функция возрастает при $x \in (-\infty;-3);(-1;+\infty)$;

$-$¿ функция убывает при $x \in (-3;-1)$;

$-$¿ точка $(-3;0)$ – точка **локального острого экстремума (максимума)**;

$-$¿ точка $(-1;-\sqrt[3]{4})$ – точка локального гладкого минимума.

7. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2(x+3)}}\right)' = \frac{\sqrt[3]{x^2(x+3)} - (x+1)\dfrac{2x(x+3)+x^2}{3\sqrt[3]{x^4(x+3)^2}}}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^2}} = ¿$$

$$¿\frac{3x^2(x+3)-(x+1)x(3x+6)}{3\sqrt[3]{x^8(x+3)^4}} = \frac{x(x+3)-(x+1)(x+2)}{\sqrt[3]{x^5(x+3)^6}} = ¿$$

$$¿\frac{x^2-3x-x^2-3x-2}{\sqrt[3]{x^5(x+3)^4}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{x^5(x+3)^4}}$$

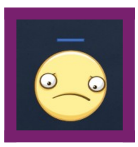
Отсюда следует, что $y'' \neq 0$ при любых значениях x; y'' не существует при $x=0$ и $x=-3$.

Таким образом:

$-$¿ кривая выпукла вниз при $x \in (-\infty;-3)$: $y''>0$;

$-$¿ кривая выпукла вниз при $x \in (-3;0)$: $y''>0$;

$-$¿ кривая выпукла вверх при $x \in (0;+\infty)$: $y''<0$;



Следовательно, точка $(0;0)$ – точка перегиба графика функции.

8. Таблица

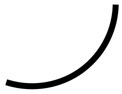
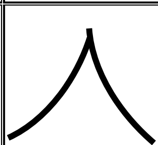
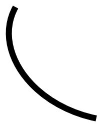
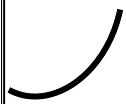
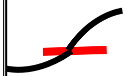
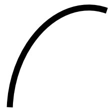
x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty$
y	−¿	0	−¿	$-\sqrt[3]{4}$	−¿	0	0
y'	+¿	∄	−¿	0	+¿	∄	+¿
y''	+¿	∄	+¿	+¿	+¿	∄	−¿
$Γ_f$							
	возрастает выпука вниз	локальный острый экстремум (максимум)	убывает выпука вниз	Локальный гладкий экстремум (минимум)	возрастает выпука вниз	Точка перегиба	возрастает выпука вверх

Таблица 4

9. Точки пересечения с осями координат.

Точки пересечения графика с осями координат - точки $(0;0)$ и $(-3;0)$

10. График.

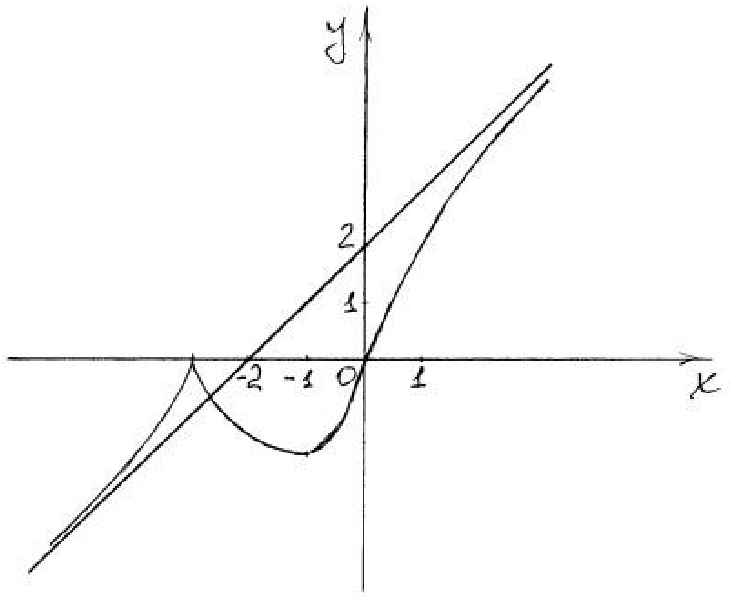


Рис.4

Разработал доцент

кафедры высшей математики Л.А. Иванова