



**Раздел № 01            Линейная и векторная алгебра**

**Тема № 01            Линейная алгебра**

**Практическое занятие № 02    Матрицы**

### Учебные вопросы:

1. Линейные действия с матрицами
2. Умножение матриц
3. Обратная матрица
4. Ранг матрицы

### Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: <https://urait.ru/bcode/561012>.
2. Давыдов Р. В. Линейная алгебра для студентов-машиностроителей: учебное пособие ч. 1, 2024, СПб: Политех-Пресс. URL: <https://elibrary.spbstu.ru/dl/2/id24-210.pdf/view>

### Решение задач

#### Задача №1:

Найти разность матриц  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

#### Решение:

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ответ:  $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

#### Задача №2:

Умножить матрицу  $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$  на матрицу  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

#### Решение:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 9 & 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 & 5 \cdot 5 + 8 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \\ 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 - 5 \cdot 9 & 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) - 5 \cdot 6 & 6 \cdot 5 + 9 \cdot 3 - 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 3 \cdot 9 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 6 & 4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ответ:  $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$

#### Задача №3:

Найти обратную матрицу к  $A$  через присоединенную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Найдем  $\Delta$  - определитель матрицы  $A$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 + 2 \cdot (-6) = 4$$

Вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12, & A_{13} &= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -4, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 4 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{aligned}$$

Составим из них присоединенную матрицу  $A^*$ :

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -6 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -6 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1.5 \\ -1.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ответ:**  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1.5 \\ -1.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Задача №4:**

Найти ранг матрицы  $A$  путем приведения её к ступенчатому виду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

Приведем с помощью элементарных преобразований матрицу  $A$  к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\substack{I \leftrightarrow II \\ IV - 2III}]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II \text{ и } IV \text{ одинаковы} \\ \text{уберем } IV \\ III - II}]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II - 2I \\ III - I}]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - 3II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 18 & 41 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

В приведенной к ступенчатому виду матрице три ненулевых строки, откуда следует, что  $\text{rank } A = 3$ .

**Ответ:** 3

**Разработал доцент**

**кафедры высшей математики**

**Р. В. Давыдов**