ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **01** **Линейная алгебра**

Практическое занятие № **03** **Системы линейных уравнений с квадратной матрицей**

Учебные вопросы:

1. Квадратные системы линейных уравнений. Матричный метод.
2. Квадратные системы линейных уравнений. Метод Крамера.

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/561012.

2. Давыдов Р. В. Линейная алгебра для студентов-машиностроителей: учебное пособие ч. 1, 2024, СПб: Политех-Пресс. URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/id24-210.pdf/view

Решение задач

Задача №1:

Решить систему с помощью матричного метода:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Если бы в уравнениях отсутствовали некоторые переменные, то на соответствующих местах в матрице A нужно было бы поставить нули.

Решение системы найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Согласно ей, нам нужно найти обратную матрицу A^{-1} и выполнить матричное умножение $A^{-1} \cdot B$. Обратную матрицу найдем по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^*$, где Δ – определитель матрицы A, а A^* – присоединенная матрица.

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

Если бы получилось, что $\Delta = 0$, то продолжить решение системы этим методом не удастся.

Вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6, A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 18, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

Составим из них присоединенную матрицу A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -11 \\ -6 & -11 & -1 \\ -12 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{-60} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix}$$

Осталось выполнить матричное умножение:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot 21 & 6 \cdot 9 & 12 \cdot 10 \\ 1 \cdot 21 & 11 \cdot 9 & -18 \cdot 10 \\ 11 \cdot 21 & 1 \cdot 9 & -18 \cdot 10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача №2:

Решить систему с помощью метода Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Если бы в уравнениях отсутствовали некоторые переменные, то на соответствующих местах в матрице A нужно было бы поставить нули.

Решение системы найдем по формуле $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – основной определитель системы

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ – вспомогательные определители системы.

Найдем основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

Если бы получилось, что $\Delta = 0$, то продолжить решение системы этим методом не удастся.

Найдем вспомогательные определители системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

Найдем неизвестные:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-300}{-60} = 5, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{-60} = -1, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-60}{-60} = 1$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**