Раздел № **01** **Линейная и векторная алгебра**

Тема № **01** **Линейная алгебра**

Практическое занятие № **04** **Произвольные системы линейных уравнений**

Учебные вопросы:

1. Теорема Кронекера–Капелли
2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Литература.

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Учебник и практикум для прикладного бакалавриата, 2025, М.: Юрайт. URL: https://urait.ru/bcode/561012.

2. Давыдов Р. В. Линейная алгебра для студентов-машиностроителей: учебное пособие ч. 1, 2024, СПб: Политех-Пресс. URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/id24-210.pdf/view

Решение задач

Задача №1:

Решить систему с помощью метода Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Составим расширенную матрицу системы $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований (прямой ход метода Гаусса):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \underset{I \leftrightarrow III}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{II-2I \\ III-3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{II/(-5) \\ III/(-2)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \underset{III-2II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Основная и расширенная матрицы приведены к ступенчатым матрицам с 3-мя ненулевыми строками. Следовательно, $rank\ A = rank\ (A|B) = 3$. По теореме Кронекера-Капелли эта система $-$ совместная. Так как $r = n = 3$, (n – число неизвестных), то система $-$ определенная (имеет единственное решение).

Решение системы найдем, выполнив обратный ход метода Гаусса. Из системы уравнений последовательно находим все неизвестные:

$$x_3 = 4$$

$$x_2 = x_3 + 1 = 5$$

$$x_1 = 9 - 2x_2 + x_3 = 3$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Задача №2:

Решить систему с помощью метода Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Составим расширенную матрицу системы $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right)$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований (прямой ход метода Гаусса):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \underset{I-III}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{II+3I \\ III+5I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 18 & 28 \\ 0 & -3 & 6 & 27 & 36 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{II/2 \\ III/(-3)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -12 \end{array}\right) \underset{III+I}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

Основная и расширенная матрицы приведены к ступенчатым матрицам. Но у первой 2 ненулевые строки (и $rank\ A = 2$) А у второй – 3 ненулевых строки (и $rank\ (A|B) = 3$). По теореме Кронекера-Капелли эта система − не совместная (решений нет).

Впрочем, это можно понять и без теоремы: уравнение, соответствующее последней строчке: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -12$ не может иметь решений, так как левая часть при любых значениях переменных будет равна нулю, а правая – нет.

Ответ: решений нет

Задача №3:

Решить систему с помощью метода Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 9 & -7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Составим расширенную матрицу системы $(A|B)$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right)$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований (прямой ход метода Гаусса):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{II-4I \\ III-2I \\ IV-I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{III+II \\ IV+2II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Основная и расширенная матрицы приведены к ступенчатым матрицам с 2-мя ненулевыми строками. Следовательно, $rank\ A = rank\ (A|B) = 2$. По теореме Кронекера-Капелли эта система $-$ совместная. Так как $r < n = 4$, (n – число неизвестных), то система $-$ неопределенная (имеет бесчисленное множество решений).

Решение системы найдем, выполнив обратный ход метода Гаусса. Выбираем базисный минор: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$ и базисные переменные x_1, x_3. Тогда свободными переменными будут x_2, x_4.

Из системы уравнений последовательно выражаем базисные переменные через свободные:

$$x_3 = \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{2}x_4 =$$

$$= -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 + \frac{3}{5}$$

Свободные переменные могут принимать любые действительные значения. Пусть $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$, где c_1 и c_2 – произвольные числа.

Тогда решение системы можно записать в виде:

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}c_1-\frac{1}{10}c_2+\frac{3}{5}\\ c_1\\ \frac{4}{5}c_2+\frac{1}{5}\\ c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\ 0\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ 0\\ \frac{1}{5}\\ 0\end{pmatrix}$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}c_1-\frac{1}{10}c_2+\frac{3}{5}\\ c_1\\ \frac{4}{5}c_2+\frac{1}{5}\\ c_2\end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Разработал доцент

кафедры высшей математики **Р. В. Давыдов**