

Раздел № 04. Введение в математический анализ.

Тема № 01 - 16 Логические символы. Множества и действия над ними. Метод мат. индукции, бином Ньютона. Вещественные числа. Типы множеств. Точная верхняя и нижняя границы. Понятие функции одной вещественной переменной и числовой последовательности (ЧП). Предел ЧП. Единственность предела. Свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Принцип сжатой переменной. Бесконечно малые и бесконечно большие ЧП. Связь между ними. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число ϵ . Два определения предела функции и их эквивалентность. Свойства пределов. Односторонние пределы. Непрерывность функции в точке, на интервале и на отрезке. Свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функций. Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций. Графики элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: 1-я и 2-я теоремы Больцано - Коши, теоремы Вейерштрасса. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых. Таблица эквивалентных бесконечно малых, замена на эквивалентные

Раздел № 05 Дифференциальное исчисление функции одной вещественной переменной.

Тема № 01-15 Определение производной и дифференциала, их физический и геометрический смысл. Таблица производных основных элементарных функций и основные правила вычисления производных и дифференциалов.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталья. Производные и дифференциалы высшего порядка. Производные функций, заданных параметрически и неявно. Формула Тейлора для многочлена и для гладких функций. Остаточный член в формах Пеано и Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена. Условия возрастания, убывания дифференцируемой функции на интервале. Локальные экстремумы функции, их типы (гладкий, острый, угловой) и условия существования. Глобальный экстремум. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции. Определение и правила отыскания вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот. Полное исследование функции и построение ее графика. Построение кривой, заданной параметрически.

Экзамен (коллоквиум 02)

Экзамен проводится в виде устного или письменного опроса (возможно компьютерное тестирование)

При устном опросе билет содержит два теоретических вопроса из списка вопросов для экзамена и одно практическое задание

Билет 1

Вопрос 1. Практическое задание (см. контрольные работы 02 и 03)

Вопрос 2. Границы числовых множеств. Понятия \sup и \inf , их свойства. Существование \sup и \inf у ограниченных числовых множеств. Примеры. Понятие предельной точки множества (точки сгущения). Замыкание множества.

Вопрос 3. Пределы последовательностей:

$$\{\sqrt[n]{a}\}, \left\{\frac{q^n}{n^p}\right\} \text{ и } \left\{\frac{\log_a n}{n^p}\right\}, \text{ где } p > 0, a > 1, q > 1.$$

Билет 2

Вопрос 1. Практическое задание

Исследовать на локальный экстремум функцию $f(x) = xe^x$.

Вопрос 2 Первый замечательный предел и следствия из него.

Вопрос 3 Понятие непрерывности функции в точке. Непрерывность элементарных функций. Примеры. Классификация точек разрыва. Примеры.

Письменный опрос (возможно компьютерное тестирование)

Вариант 1

Вопрос 1- 3 Теоретические вопросы из списка вопросов для экзамена

- Дайте определение предела числовой последовательности на примере:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$$

- Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке $[-2; 3]$. С помощью рисунка поясните геометрический смысл данной теоремы.
- Выведите по определению формулу для производной функции $f(x) = 2^x$.

Вопрос 4. $X = [0; 2) \cup (-1; 1)$. $\sup X = \underline{\hspace{1cm}}$ $\inf X = \underline{\hspace{1cm}}$

Вопрос 5. Среди перечисленных ниже числовых последовательностей выберите все бесконечно малые.

- $5^{\ln \frac{1}{n}}$
- $\ln 5^{\frac{1}{n}}$
- $\log_{\frac{1}{n}} 5$
- $\log_5 \frac{1}{n}$
- среди этих величин нет бесконечно малых

Вопрос 6. Известно, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) + 5| < \varepsilon \Leftrightarrow$

- нет правильного ответа
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -5$

Вопрос 7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - \sqrt[3]{n} + 5n\sqrt{n}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{4n^2 + 7n - 1}} = \text{---}$$

Вопрос 8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n \ln 3} = \text{---}$$

Вопрос 9.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2x + 1} = \text{---}$$

Вопрос 10.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 12 \cdot \frac{2x^2 - x - 6}{x^3 - 8} = \text{---}$$

Вопрос 11.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \text{---}$$

Вопрос 12. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x \cdot \operatorname{arctg} x}{(\sqrt{1-x}+1) \ln\left(1-\frac{3\pi x}{2}\right)} = \text{---}$

Вопрос 13. Известно, что $f(x_0 + 0) = \infty$, $f(x_0 - 0) = 7$, а в точке x_0 функция $f(x)$ не определена. Тогда в точке x_0 эта функция:

- нет правильного ответа
- имеет разрыв второго рода
- имеет неустранимый разрыв первого рода
- непрерывна
- имеет устранимый разрыв 1 рода

Вопрос 14. Функция $y = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 2x}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$

- нет правильного ответа
- имеет разрыв второго рода
- имеет неустранимый разрыв первого рода
- непрерывна
- имеет устранимый разрыв

Вопрос 15. Вычислите производную функции $y = \sqrt[3]{1 + 3\cos x}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Вопрос 16. Для функции $y(x)$, заданной параметрически $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$

найдите указанные производные при $t = 1$:

$$y'_x(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$y''_{xx}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Вопрос 17. Функция $y = \sqrt{x^2 - 9}$ задана на промежутке $[-7; -4]$. Вычислите значение производной функции, обратной к данной, в точке $y_0 = -4$.

Ответ: $\underline{\hspace{2cm}}$

Вопрос 18. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = 2^x$ в точке $x_0 = 1$. Вставьте пропущенные числа

$$y - \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}(x - \underline{\hspace{1cm}})$$

Если будут получаться иррациональные числа или дроби, то вычислите на калькуляторе, в ответ введите полученное число с двумя (или более) знаками после запятой (или точки). Можно не округлять.

Вопрос 19. Для функции $y(x)$, заданной неявно $x^2 + \frac{x}{y} - y^2 = 10$, найдите производную $y'_x(4; -2)$. $y'_x(4; -1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Вопрос 20. Найдите первый и второй дифференциалы функции $y = \cos^2 x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{8}$, если $\Delta x = -0,1$

$$dy(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d^2y(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Вопрос 21. Для функции $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 4)$ условия теоремы Ролля выполнены на отрезке:

- нет правильного ответа
- $[-1;1]$
- $[-2;0]$
- $[1;4]$
- $[0;2]$

Вопрос 22. Проверьте выполнение условий теоремы Лагранжа для функции $f(x) = -3x^2 + 10x - 61$ на отрезке $[-7;1]$ и найдите значение ξ в формуле Лагранжа. $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$

Вопрос 23. Многочлен $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$ разложен по степеням $(x + 2)$. Найдите коэффициент при $(x + 2)^2$.

Ответ: $\underline{\hspace{2cm}}$

Вопрос 24. Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет первую и вторую производные, причем $f'(x_0) = 4$, $f''(x_0) = -5$. Тогда в некоторой (достаточно малой)

окрестности этой точки x_0 функция $f(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{убывает} \\ \text{возрастает} \\ \text{имеет максимум} \\ \text{имеет минимум} \end{array} \right.$ и её график в

этой окрестности имеет $\left\{ \begin{array}{l} \text{выпуклость вверх} \\ \text{выпуклость вниз} \\ \text{в этой точке перегиб} \end{array} \right.$.

Вопрос 25. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \text{ в точке перегиба.}$$

Ответ: _____

Вопрос 26. Найдите наклонную асимптоту графика функции $y = \frac{-x^3 + 7x^2 + 2x - 5}{x^2 - 7}$

Вставьте пропущенные числа $y = ____x + ____$

Вопрос 27. Найдите x_0 – точку экстремума функции $f(x) = xe^x$.

$x_0 = ____$. В этой точке функция имеет локальный $\left[\begin{array}{l} \text{минимум} \\ \text{максимум} \end{array} \right.$

Вопрос 28. Справедливо ли следующее утверждение?

Произведение бесконечно большой величины на ограниченную есть бесконечно большая величина.

- Верно
- Неверно

**Разработал доцент кафедры
кафедры высшей математики**

Иванова Л.А.