

Раздел № 01 Линейная и векторная алгебра

Тема № 01-08

Матрицы: определение, линейные операции с матрицами, транспонирование матриц. Умножение матриц. Определители: определение, свойства, вычисление. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.

Ранг матрицы: определение и вычисление. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): матричная запись. Крамеровские СЛАУ: правило Крамера, метод обратной матрицы. Метод Гаусса решения СЛАУ.

Критерий совместности СЛАУ. Теорема и метод Кронекера-Капелли.

Линейные однородные системы (ЛОС). Существование ненулевых решений.

Расчетное задание (часть 1)

Вариант 1

Задача 1. Вычислить определитель

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x^2 + \frac{3}{x} & x + \frac{9}{x^2} \\ \frac{3}{x} - x^2 & \frac{9}{x^2} - x \end{vmatrix}; \text{ b) } \begin{vmatrix} -10 & 2 & 4 \\ -4 & -7 & 1 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix}; \text{ c) } \begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Найти минор M_{13} и алгебраическое дополнение A_{43} определителя c) из задания 1.

Задача 3. а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 18 \\ 3 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B - B \cdot A$

Задача 4. $f(x) = -3x^2 + 2x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $f(A)$.

Задача 5. Определить ранг матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 5 & -9 \\ 5 & -9 & 14 & -21 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

Задача 6. Найти A^{-1} для матрицы A двумя способами. Проверить, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 7. Решить систему уравнений по формулам Крамера и матричным способом.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Задача 8.

Исследовать и решить систему уравнений. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

Задача 9. Решить однородную систему уравнений. Записать общее решение в матричной форме. Найти фундаментальную систему решений (ФСР).

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Вариант 2

Задача 1. Вычислить определитель

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \cos 18^\circ & \sin 102^\circ & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin 18^\circ & \cos 102^\circ & 1 \end{vmatrix}; \text{ b) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}; \text{ c) } \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Найти минор M_{24} и алгебраическое дополнение A_{32} определителя c) из задания 1.

Задача 3. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot (3E - 2B)$.

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B - B \cdot A$

Задача 4. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $f(A)$.

Задача 5. Определить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 3 & 5 & 10 & 13 & 16 \\ 3 & 4 & 11 & 14 & 17 \\ 9 & 17 & 28 & 37 & 45 \end{pmatrix}$$

Задача 6. Найти A^{-1} для матрицы A двумя способами. Проверить, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 7. Решить систему уравнений по формулам Крамера и матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

Задача 8.

Исследовать и решить систему уравнений. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Задача 9. Решить однородную систему уравнений. Записать общее решение в матричной форме. Найти фундаментальную систему решений (ФСР).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

**Разработал доцент кафедры
кафедры высшей математики**

Иванова Л.А.