

§ 12. Экзаменационный тест по математике за 1-й семестр

Образец

I. Линейная алгебра.

1. Решите систему
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

II. Векторная алгебра.

2. Сформулируйте определение смешанного произведения векторов.

3. Вычислите периметр треугольника с вершинами $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(2;0)$.

I. Аналитическая геометрия.

4. Запишите общее уравнение прямой на плоскости и объясните геометрический смысл коэффициентов, входящих в уравнение.

5. Сформулируйте определение эллипса и запишите его уравнение.

6. Составьте уравнение прямой на плоскости, составляющей с осью Ox угол $\frac{3\pi}{4}$ и отсекающей от оси Oy отрезок, равный 2.

7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, -2, 2)$ и параллельной плоскости $x + 2y - z + 1 = 0$.

II. Введение в математический анализ.

8. Запишите второй замечательный предел.

9. Сформулируйте теорему о сжатой переменной.

10. Сформулируйте определение предела функции при $x \rightarrow x_0$.

11. Что означает, что бесконечно малая α имеет высший порядок малости, чем бесконечно малая β ?

12. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{\sin x}}$

13. Вычислите $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^6 + x^3 + 1}}{x^2 + x + 2}$.

14. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\ln(1+x)}$.

15. Укажите точку разрыва функции $y = \frac{x}{x+1}$ и укажите ее род, вычислив пределы функции слева и справа в этой точке.

III. Производная и дифференциал функции.

16. Сформулируйте определение производной функции.

17. Укажите физический смысл производной.

18. $y = \sin^2 \frac{1}{x}$; $y' = ?$

19. Функция задана параметрически: $x = 2sh5t$; $y = ch3t$; $y'_x = ?$

20. $y = x^4 + x^2 + 1$; Вычислите dy при $x = 1$; $dx = 0,1$.

Вариант 1.

1	Решите систему методом Гаусса (рекомендуется). В ответе укажите x_3 : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$
2	Найдите алгебраическое дополнение элемента a_{31} определителя $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$
3	Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; -1; 5)$ перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , соединяющему точки $B(0; 7; 8)$ и $C(-1; 3; 8)$.
4	Найдите проекцию вектора $\vec{a} = (1, 1, 1)$ на направление вектора $\vec{b} = (-1, 2, 3)$.
5	С помощью векторного произведения найдите площадь треугольника, построенного на двух векторах $\vec{a} = (-2, 1, 2)$ и $\vec{b} = (1, 1, 2)$, как на сторонах.
6	Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 1}}{\sqrt{4x^3 + x + 2}}.$
7	Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \ln(1 + 2x)}.$
8	Укажите точку x_0 разрыва функции $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и определите ее род, вычислив в ней пределы слева и справа.
9	Укажите значение производной функции $y = \arcsin\left(\frac{1}{2} \sin^2 x\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.
10	Укажите значение производной функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ в точке $t = \frac{\pi}{2}$.
11	Даны матрицы $A_{3 \times 2}$, $B_{2 \times 4}$, $C_{4 \times 3}$. Какие из произведений матриц AB , BC , AC , CA , BA определены?
12	Сформулируйте свойства определителя, связанные с транспонированием определителя, с перестановкой местами двух параллельных рядов определителя, с умножением определителя на число, не равное нулю.
13	В системе $AX = B$, число уравнений равно числу неизвестных и $\Delta A \neq 0$. Запишите формулы Крамера и поясните, что такое определители Δ_i .
14	Перечислите свойства скалярного произведения.
15	Выразите необходимое и достаточное условие компланарности трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ через их смешанное произведение.
16	Напишите общее уравнение прямой на плоскости.
17	Плоскость задана уравнением $\vec{N} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. Поясните геометрический смысл векторов $\vec{N}, \vec{r}, \vec{r}_0$.
18	Напишите условие перпендикулярности прямых $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$.
19	Исследовать и построить кривую, определяемую уравнением $-3y^2 - 6x + 6 = 0$.
20	Сформулируйте теорему о замене бесконечно малых функций их эквивалентами при отыскании предела отношения.
21	Дайте определение понятия - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ на языке $\delta - \varepsilon$.
22	Сформулируйте теорему Больцано-Коши о промежуточных значениях функции, непрерывной на $[a, b]$.
23	Какое числовое множество называется ограниченным снизу?
24	Напишите правило для вычисления производной сложной функции $y = f(u(x))$.
25	Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Вариант 2.

1	Решите систему методом Гаусса (рекомендуется). В ответе укажите x_3 : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$
2	Найдите алгебраическое дополнение элемента a_{42} определителя $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.
3	Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-10; 0; 9)$ перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , соединяющему точки $B(12; 4; 11)$ и $C(8; 5; 15)$.
4	Найдите работу силы $\vec{F} = (1, 2, 3)$ на пути из точки $A(1, -2, -2)$ в точку $B(2, 1, 3)$.
5	С помощью векторного произведения найдите площадь треугольника, построенного на двух векторах $\vec{a} = (-2, 1, -2)$ и $\vec{b} = (1, 1, 2)$, как на сторонах.
6	Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{x^3 - 3x + 2}$.
7	Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 x}$.
8	Укажите точку x_0 разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ и определите ее род, вычислив в ней пределы слева и справа.
9	Укажите значение производной функции $y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}$ в точке $x = \sqrt{2}$.
10	Укажите значение производной функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sin^{2/3} t, \\ y = \cos^{2/3} t, \end{cases}$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$.
11	Даны матрицы $A_{3 \times 4}$, $B_{2 \times 3}$, $C_{4 \times 3}$. Какие из произведений матриц AB, BC, AC, CA, BA определены?
12	Сформулируйте свойства определителя, связанные с представлением определителя в виде суммы двух определителей.
13	В системе $AX = 0$, число уравнений равно числу неизвестных. При каком условии эта система имеет ненулевые (нетривиальные) решения.
14	Выразите $np_a \mathbf{v}$ через скалярное произведение векторов \vec{a} и \mathbf{v} , и модуль вектора \vec{a} .
15	Каков геометрический смысл $ \vec{a} \times \mathbf{v} $?
16	Прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями $L_1: y = k_1x + l_1$, $L_2: y = k_2x + l_2$. Напишите условие параллельности и перпендикулярности этих прямых.
17	Даны две плоскости: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Напишите условия перпендикулярности этих плоскостей.
18	При каком условии плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ перпендикулярны?
19	Исследовать и построить кривую, определяемую уравнением $-x^2 - 4y^2 + 2 = 0$.
20	Что означает запись $\alpha = o(\beta)$ (α малое от β)? Приведите пример бесконечно малых функций при $x \rightarrow 0$, связанных такими соотношениями.
21	Дайте определение понятия $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.
22	Дайте определение понятия - функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ на языке $\delta - \varepsilon$.
23	Что называется точной верхней границей числового множества?
24	Напишите формулу для приращения функции в точке x_0 , имеющую в этой точке производную $f'(x) \neq 0$.
25	Приведите пример функции, непрерывной в некоторой точке, но не имеющей в этой точке производной.