§10. Исследование функций

10.1. Основные формулы и определения для решения задач

Правилом Лопиталя называют теоремы, сводящие вычисление предела отношения двух функций в случае неопределённости $0/0$ или ∞/∞ к вычислению предела отношения производных этих функций.

Теорема (*правило Лопиталя для раскрытия неопределённости* 0/0). Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1. определены и дифференцируемы на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, при этом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
2. производная $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки a,
3. существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, при этом выполняется равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема (*правило Лопиталя для раскрытия неопределённости* ∞/∞). Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1. определены и дифференцируемы на некоторой проколотой окрестности точки a, при этом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,

2. производная $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки a,

3. существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, при этом справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Определение. Критической точкой функции называется точка, в которой первая производная функции равна нулю, бесконечности или не существует.

Достаточный признак существования экстремума, связанный с первой производной.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0)$ критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках этой окрестности за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе аргумента x через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, а при изменении знака $f'(x)$ с минуса на плюс – минимум.

***Определение*.** График Г функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале (a, b), называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на (a, b), если он расположен выше (ниже) касательной, проведённой к Г в любой точке $M(x, f(x))$, где $x \in (a, b)$.

Теорема. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) всюду на этом интервале, то график Г этой функции на интервале (a, b) является выпуклым вверх (вниз).

Определение. Точки из области определения функции $f(x)$, в которых её вторая производная равна нулю, бесконечности, или не существует, называются *точками, подозрительными на перегиб*. Предполагается, что сама функция $f(x)$ в этих точках непрерывна.

Теорема (*достаточное условие существования точки перегиба графика функции*). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на некоторой проколотой окрестности точки x_0, подозрительной на перегиб графика функции. Если при переходе аргумента x через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 является абсциссой точки перегиба $M_0(x_0, f(x_0))$ графика $f(x)$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 бесконечен, то прямая L: $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$.

Вертикальные асимптоты графика данной функции проходят через её точки разрыва 2-го рода (бесконечного).

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена для сколь угодно больших по модулю значений x. Прямая L: $y = kx + b$ называется *асимптотой графика* функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если $f(x)$ представима в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Замечание. Если угловой коэффициент k асимптоты L: $y = kx + b$ равен нулю, то она называется *горизонтальной*, если же $k \neq 0$, то асимптота называется *наклонной*.

Теорема. Для того чтобы прямая L: $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо, чтобы существовали два предела:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

и достаточно, чтобы существовал второй из них.

10.2. Образцы задач с решениями

Задача 1. Правило Лопиталя. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - shx}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-shx}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\mathrm{c}hx}$$. Повторно применяем правило Лопиталя несколько раз , так как неопределенность того же типа сохраняется.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\mathrm{c}hx}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{-shx}=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{-chx}=-16.$$

Задача 2. Правило Лопиталя. Вычислить предел выражения показательного типа $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{\cos x}$.

Решение. Имеем неопределенность типа ∞^0. Логарифмируем предел, полагая $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{\cos x}=A.$ $\ln A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\ln tgx=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln tgx}{\dfrac{1}{\cos x}}$. Получили

неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, к которой применимо правило Лопиталя.

$$\ln A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln tgx}{\dfrac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{tgx\cos^2 x}}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0.$$ Отсюда $A=e^0=1.$

Задача 3. Выделение главой части бесконечно малой. Выделите главную часть бесконечно малой $\alpha\left(x\right)=x-\ln\left(1+x\right)$ вида Ax^n при $x\to 0$.

Решение. Применяем формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для функции $\ln\left(1+x\right)=x-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$. Тогда

$\alpha\left(x\right)x-x+\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)=\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$. Отсюда следует, что главной частью

$\alpha\left(x\right)$ является $\dfrac{x^2}{2}$.

Задача 4. Формула Маклорена. Приближенные вычисления. Вычислите $\sin 0,25$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Применяем формулу Маклорена четвертого порядка с остаточным членом в форме Пеано. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$. Тогда

$$\sin 0,25 \approx 0,25 - \frac{(0,25)^3}{6} + \frac{(0,25)^5}{120} = 0,25 - 0,0026 = 0,2474 \approx 0,247.$$

Задача 5. Формула Маклорена с остаточным членом. Напишите формулу Маклорена 3-го порядка с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x) = \sin 2x - 2\sin x$.

Решение. $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + o\left(x^3\right)$.

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2\cos x\Big|_{x=0} = 0;$$

$$f''(x) = -4\sin 2x + 2\sin x\Big|_{x=0} = 0;$$

$$f'''(x) = -8\cos 2x + 2\cos x\Big|_{x=0} = -6;$$

Тогда $f(x) = \frac{1}{3!}(-6)x^3 + o\left(x^3\right) = -x^3 + o\left(x^3\right)$.

Задача 6. Найдите экстремумы функции $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Решение. Используем правило отыскания экстремумов. Находим производную. $y' = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}\left(1+x^2\right)^2}$. Решаем уравнение $y' = 0$ в области определения функции $x \geq 0$. Получаем единственный корень $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$y' > 0$ при $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. $y' < 0$ при $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < +\infty$. Отсюда следует, что в точке $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ имеем максимум $y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}}$.

Задача 7. Укажите точки перегиба графика функции
$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$.

Решение. Находим вторую производную. $y' = 6x^2 - 18x + 12$;

$y'' = 12x - 18$. Решаем уравнение $y'' = 0$. Получаем $x = \frac{3}{2}$. Вторая производная в этой точке меняет знак, поэтому она является абсциссой точки перегиба. Точкой перегиба является точка $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Задача 8. Укажите интервалы выпуклости вниз графика функции
$y = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}$.

Решение. Находим вторую производную функции. $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$;

$y'' = x - \frac{1}{x^3}$. Решаем уравнение $y'' = 0$; $\frac{x^4 - 1}{x^3} = 0$; $x = \pm 1$.

Вторая производная отрицательна в промежутках $(-\infty; -1)$; $(0;1)$. Они искомые.

Задача 9. Укажите асимптоты графика функции $y = \frac{3x^2 - 1}{x}$.

Решение. Точка $x = 0$ является точкой бесконечного разрыва (2-го рода) функции. $f(-0) = +\infty$; $f(+0) = -\infty$. Отсюда следует, что график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x=0$. Находим наклонную асимптоту $y=kx+b$. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2}=3$;

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\left[\dfrac{3x^2-1}{x}-3x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[-\dfrac{1}{x}\right]=0$. Наклонная асимптота имеет уравнение $y=3x$.

10.3. Задачи для решения

Задача 1. Правило Лопиталя. Вычислить предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. Отв. 2.	3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$. Отв. -1/3.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos 2x}{e^{2x}-\cos x}$. Отв. ½.	4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^2}$. Отв. -1.

Задача 2. Правило Лопиталя. Вычислить предел выражения показательного типа

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$. Отв. 1.	3. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{1/\ln x}$. Отв. e.
2. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sh} x}$. Отв. 1.	4. $\lim\limits_{x\to +0} x^{1/\ln\sin x}$. Отв. e.

Задача 3. Выделение главой части бесконечно малой. Выделите главную часть бесконечно малой

1. $\alpha(x)=x+\ln(1-x)$. Отв. $-\dfrac{x^2}{2}$.	3. $\alpha(x)=x\operatorname{sh} x-x^2$. Отв. $\dfrac{x^4}{6}$.
2. $\alpha(x)=x^2-x\sin x$. Отв. $\dfrac{x^4}{6}$.	4. $\alpha(x)=\sqrt{1+2x}-e^x$. Отв. $-x^2$.

Задача 4. Формула Маклорена. Приближенные вычисления. Вычислите значение функции с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

1. $\sin\frac{1}{2}$. Отв. 0,479.	3. $\sin\frac{1}{4}$. Отв. 0,224.
2. $\cos\frac{1}{2}$. Отв. 0,878.	4. $\cos\frac{1}{4}$. Отв. 0,969.

Задача 5. Формула Маклорена с остаточным членом. Напишите формулу Маклорена 3-го порядка с остаточным членом в форме Пеано для функции.

1. $y = \operatorname{tg} x$. Отв. $x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.	3. $y = \sqrt[5]{1+x}$. Отв. $1 + \frac{x}{5} - \frac{2}{25}x^2 + o(x^2)$.
2. $y = \arcsin x$. Отв. $x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.	4. $y = \sqrt[5]{1-x}$. Отв. $1 - \frac{x}{5} - \frac{2}{25}x^2 + o(x^2)$.

Задача 6. Найдите экстремумы функции .

1. $y = \frac{x}{1+x^2}$. Отв. $y(\pm 1) = \pm 1/2$.	3. $y = e^{-x^2/2}$. Отв. $\max y = y(0) = 1$.
2. $y = \frac{\ln x}{x}$. Отв. $\max y = y(e) = 1/e$.	4. $y = x\ln x$. Отв. $\min y = y(e^{-1}) = -1/e$.

Задача 7. Укажите точки перегиба графика функции.

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. Отв. $(2, -2)$.	3. $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$. Отв. $(1, 2)$.
2. $y = \frac{\ln x}{x}$. Отв. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$.	4. $y = \frac{1}{x^2+3}$. Отв. $\left(\pm 1, \frac{1}{4}\right)$.

Задача 8. Укажите интервалы выпуклости вниз графика функции.

1. $y = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$. Отв. $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$.	3. $y = x^3 - \frac{1}{x^2}$. Отв. $(1, +\infty)$.
2. $y = xe^{-4x}$. Отв. $y = xe^{-4x}$. $(1, +\infty)$.	4. $y = \ln(1 + x^2)$. Отв. $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

Задача 9. Укажите асимптоты графика функции.

1. $y=\dfrac{2x^2+1}{x}$. Отв. $y=2x,\ x=0$.	3. $y=\dfrac{x^2}{x+2}$. Отв. $y=x-2,\ x=-2$.
2. $y=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$. Отв. $y=2x+2,\ x=1$.	4. $y=x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$. Отв. $y=x$.

10.4. Теоретические вопросы

1. Дайте определение критической точки функции.

2. Дайте определение экстремума функции.

3. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.

4. Сформулируйте первый достаточный признак экстремума (по первой производной).

5. Сформулируйте второй достаточный признак экстремума (по второй производной).

6. Сформулируйте правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом промежутке.

7. Сформулируйте определение выпуклости графика функции вверх (вниз).

8. Сформулируйте достаточный признак выпуклости графика функции вверх (вниз), основанный на второй производной.

9. Сформулируйте определение точки перегиба графика функции.

10. Сформулируйте определение точки, подозрительной на перегиб.

11. Сформулируйте достаточный признак перегиба, основанный на второй производной.

12. Сформулируйте определение вертикальной асимптоты графика функции.

13. Сформулируйте определение наклонной асимптоты графика функции.

14. Какая асимптота графика функции называется горизонтальной?

15. Как найти уравнение наклонной асимптоты графика функции?

16. Сформулируйте правило построения графика функции.

17. Сформулируйте правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

18. Запишите формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

19. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

20. Что такое главная часть бесконечно малой?