

§ 5. Кривые и поверхности второго порядка

5.1. Основные формулы для решения задач

Каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$.

Трехосный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Сфера радиуса R $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$; $p > 0, q > 0$.

Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$; $p > 0, q > 0$.

Эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz

$$y^2 = 2px.$$

5.2. Образцы решения задач

Задача 1. Построить кривую, определяемую уравнением $-9x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 1 = 0$.

Решение. Записываем уравнение в виде $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{2} = 1$ и сравниваем

полученное уравнение с каноническими. заключаем, что имеем эллипс с полуосями $a = 1/3$ и $b = 2$. В силу трудностей вычерчивания кривых ограничимся общим описанием кривой. Оси эллипса совпадают с осями координат. Полуось $a = 1/3$ располагается на оси абсцисс, полуось $b = 2$ располагается на оси ординат.

Задача 2. Определите тип кривой, определяемой уравнением $-4x^2 - y^2 + 8x + 1 = 0$. Если это гипербола или эллипс (окружность) – укажите центр кривой и полуоси (радиус окружности), если парабола – укажите вершину параболы и уравнение оси симметрии.

Решение. Записываем уравнение в виде, выделяя полный квадрат по переменной x $4x^2 - 8x + 1 + y^2 = 1; (2x - 1)^2 + y^2 = 1;$

$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + y^2 = 1.$ Имеем эллипс с центром в точке $M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Полуось

$a = \frac{1}{2}$ располагается на оси абсцисс. Полуось $b = 1$ располагается на оси ординат.

Задача 3. Какую из перечисленных ниже поверхностей определяет уравнение:

$$x^2 + 6z = 0;$$

- А) Эллипсоид. Б) Сферу. В) Коническую поверхность. Г) Эллиптический параболоид
 Д) Однополостный гиперболоид. Е) Двухполостный гиперболоид. Ж) Гиперболический а параболоид. З) Цилиндрическую поверхность. И) Ни одну из перечисленных выше поверхностей.

Решение. Так как уравнение не содержит переменной y , то уравнение описывает цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy . Этот цилиндр – параболический, так как направляющей является парабола, расположенная в плоскости xOz . Ее осью симметрии является ось Ox .

Вершина параболы находится в начале координат.

Задача 4. Какую из перечисленных ниже поверхностей определяет уравнение:

$$4x^2 - \frac{1}{9}y^2 - 4z + 16 = 0;$$

- А) Эллипсоид. Б) Сферу. В) Коническую поверхность. Г) Эллиптический параболоид
 Д) Однополостный гиперболоид. Е) Двухполостный гиперболоид. Ж) Гиперболический а параболоид. З) Цилиндрическую поверхность. И) Ни одну из перечисленных выше поверхностей.

Решение. Запишем уравнение в виде $4x^2 - \frac{y^2}{9} = 4(z - 4)$. Сравнивая с каноническими уравнениями, видим, что уравнение описывает гиперболический параболоид с вершиной в точке $(0, 0, 4)$.

5.3. Задачи для решения

Задача 1. Построить кривую, определяемую уравнением

1. $-4x^2 - y^2 + 1 = 0$	3. $4x^2 + 4y^2 - 4 = 0$	5. $5x^2 + 5y^2 - 1 = 0$
2. $2x^2 - 2y^2 + 3 = 0$	4. $4x^2 + y^2 - 7 = 0$	6. $2x^2 - 8y^2 + 7 = 0$

Задача 2. Определите тип кривой, определяемой уравнением. Если это гипербола или эллипс (окружность) – укажите центр кривой и полуоси (радиус окружности), если парабола – укажите вершину параболы и уравнение оси симметрии.

1. $-9x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 6x + 1 = 0$	3. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8 = 0$
2. $2x^2 - 2y^2 + 16y + 3 = 0$	4. $6x^2 + 3y^2 + 18y - 1 = 0$

Задача 3. Какую из перечисленных ниже поверхностей определяет уравнение:

А) Эллипсоид. Б) Сферу. В) Коническую поверхность. Г) Эллиптический параболоид
 Д) Однополостный гиперболоид. Е) Двухполостный гиперболоид. Ж) Гиперболический параболоид. З) Цилиндрическую поверхность. И) Ни одну из перечисленных выше поверхностей.

1. $x^2 + 4z = 0;$	3. $y^2 + 2z^2 = 6x^2;$
2. $x^2 + 2y^2 - 2z = 0;$	4. $x^2 - 2y = -z^2;$