§ 7. Предел

6. 1. Основные формулы для решения задач

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

Следствия замечательных пределов

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\sin x}{x}=1.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$

Сравнение бесконечно малых функций

Определение. Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$.

Определение. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0,\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x\to a$.

Определение. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется величиной более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$ при $x\to a$.

Обозначение: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$ ($\alpha(x)$ есть o малое от $\beta(x)$).

Например, $\sin^2 2x$ имеет более высокий порядок малости, чем x при $x \to 0$ (или $\sin^2 2x = o(x)$ при $x \to 0$), поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \cdot 4x = 0.$

Определение.

Если $\nexists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми при $x \to a$.

Определение. Если существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to a$.

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Свойства эквивалентных бесконечно малых

Теорема. (*теорема о замене эквивалентными в произведении и отношении*). Если $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$ и $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$, $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$ при $x \to a$, то 1) $\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) \sim \beta_1(x) \cdot \beta_2(x)$;

2) $\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \sim \dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$ при $x \to a$; 3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$.

Теорема. Для того чтобы бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to a$ выполнялось одно из равенств $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$ или $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть функция $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда

$\sin\alpha \sim \alpha,$	(1)	$1 - \cos\alpha \sim \alpha^2/2,$	(2)
$\mathrm{tg}\,\alpha \sim \alpha,$	(3)	$\arcsin\alpha \sim \alpha,$	(4)
$\mathrm{arctg}\,\alpha \sim \alpha,$	(5)	$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha,$	(6)

$\ln(1+\alpha) \sim \alpha,$ (7) | $(1+\alpha)^{\mu} - 1 \sim \mu\alpha.$ (8)

Свойства символа *o*

Пусть $\beta(x) \to 0$ при $x \to a$.

1. $o(\beta) \pm o(\beta) = o(\beta)$.

2. $o(c\beta) = o(\beta)$, $co(\beta) = o(\beta)$ и $o(c\beta + o(\beta)) = o(\beta)$ для $\forall c \neq 0$.

3. $(o(\beta))^n = o(\beta^n)$ и $\beta^n o(\beta) = o(\beta^{n+1})$ при $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

Асимптотические разложения бесконечно малых функций

Пусть функция $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда

$\sin\alpha = \alpha + o(\alpha),$	(9)	$1 - \cos\alpha = \alpha^2/2 + o(\alpha^2),$	(10)
$\mathrm{tg}\,\alpha = \alpha + o(\alpha),$	(11)	$\arcsin\alpha = \alpha + o(\alpha),$	(12)
$\mathrm{arctg}\alpha = \alpha + o(\alpha),$	(13)	$e^{\alpha} - 1 = \alpha + o(\alpha)$	(14)
$\ln(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha),$	(15)	$(1+\alpha)^{\mu} - 1 = \mu\alpha + o(\alpha).$	(16)

Правила вычисления пределов.

1. В отсутствии неопределённости предел вычисляется с помощью теорем о пределах и непрерывности функций (теоремы 2.2, 4.3 – 4.5, замечание 2.2).

2. Предел выражения, представляющего неопределённость $0/0$ или $0\cdot\infty$ вычисляется с помощью теоремы о замене эквивалентными бесконечно малыми, при этом применяется таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

3. Для вычисления предела неопределённого выражения, содержащего сумму или разность бесконечно малых или бесконечно больших функций применяется таблица асимптотических разложений.

6.2. Образцы задач с решениями

Задача 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3x+2}}{3x-1}$.

Решение. Выносим переменную x в наивысшей степени в числителе и знаменателе и производим сокращения.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\frac{2}{3}.$$

Задача 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-e^{2x})\,\mathrm{tg}\,3x}{\ln^2(1+x)}$. Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых и заменим данные бесконечно малые на более простые эквиваленты, от чего величина предела не меняется. $1-e^{-2x}\sim 2x;\quad tg3x\sim 3x;\quad \ln\left(1+x\right)\sim x$.

Получаем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x3x}{x^2}=6$.

Задача 3. Вычислить предел $A=\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\,3x)^{2/x}$.

Логарифмируем предел $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln\left(1+tg3x\right)$ и заменим данную бесконечно малую на более простой эквивалент, от чего величина предела не меняется

$\ln\left(1+tg3x\right)\sim tg3x\sim 3x$. Тогда $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}3x=6$. Отсюда $A=e^6$.

1. *Задача 4.* Сравните бесконечно малые $\alpha = 1\left(n - 1x^2\right)$ и $\beta=2x^2-5x$ при $x\to 0$. *Решение.* Вычисляем предел отношения бесконечно малых α/β, заменяя данные бесконечно малые на более простые эквиваленты. По величине предела делаем суждение о сравнении. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x^2}{2x^2-5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x}{2x-5}=0.$ Бесконечно малая α имеет высший порядок малости, чем бесконечно малая β.

Задача 5. Укажите значение параметра λ, при котором бесконечно малые $\alpha=\sqrt{1+\lambda x}-1$ и $\beta=x+x^2$ будут эквивалентными при $x\to 0$.

Решение. Вычисляем предел отношения бесконечно малых и подбираем значение параметра так, чтобы предел был равен 1.

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\lambda x}-1}{x+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\lambda x}{x+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\lambda}{1+x}=\frac{\lambda}{2}=1.$$ Отсюда $\lambda=2$

6.3. Задачи для решения

Задача 1. Вычислить предел

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}}{2x-1}$. Отв.. $1/2$	3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{9x^2+x+2}}$. Отв. $2/3$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-2x+2}}{4x+1}$. Отв. $3/4$	4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+1}}{\sqrt{4x^2+x+1}}$. Отв. $1/2$

Задача 2. Вычислить предел

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\ln(1+x)}$. Отв. 2	3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-e^{2x})\operatorname{tg}3x}{\ln^2(1+x)}$. Отв. -6
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\ln(x+1)}$. Отв. $-3/2$	4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{5x+1}}{x}$. Отв. $-5/2$

Задача 3. Вычислить предел

1. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{-3/x}$. e^{-3}	3. $\lim\limits_{x\to0}(1+x-x^3)^{1/x}$. Отв. e
2. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin2x)^{1/x}$. e^2	4. $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{2/x}$. Отв. e^{-2}

Задача 4. Сравнение бесконечно малых α,β при $x\to0$.

1. Сравните бесконечно малые $\alpha=x^2+\sin^3x$ и $\beta=1-\cos x$ при $x\to0$.
   Отв. α,β – одного порядка.
2. Сравните бесконечно малые $\alpha=\dfrac{1-\cos x}{x}$ и $\beta=\sin x$ при $x\to0$.
   Отв. α – высшего порядка, чем β.
3. Сравните бесконечно малые $\alpha=\ln(1+x^2)$ и $\beta=4x^2-3x$ при $x\to0$.
   Отв. α – высшего порядка, чем β.
4. Сравните бесконечно малые $\alpha=1-\cos2x$ и $\beta=x+2x^2$ при $x\to0$.

Отв. α – высшего порядка, чем β.

a. Теоретические вопросы

1. Дайте определение понятия - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ на языке $\delta - \varepsilon$.
2. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, используя понятие бесконечно малой функции при $x \to a$.
3. Сформулируйте теорему о сжатой переменной.
4. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве.
5. Сформулируйте теорему об ограниченности функции, имеющей предел при $x \to a$
6. Сформулируйте теоремы о пределах суммы , произведения и частного функций.
7. Сформулируйте определение понятия $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ на языке $\delta - \varepsilon$.
8. Сформулируйте определение понятия $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$ на языке $\delta - \varepsilon$.
9. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$.
10. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$.
11. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$.
12. Напишите первый замечательный предел и пределы, связанные с ним.
13. Напишите второй замечательный предел и пределы, связанные с ним.
14. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
15. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
16. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.