§1. Линейная алгебра

1.1. В §1 представлены задачи на решение линейных алгебраических крамеровских систем с определителем, отличным от нуля, вычисление определителей и действий с матрицами.

Линейные алгебраические системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

можно решать методом Гаусса, методом Крамера и методом обратной матрицы.

Метод Гаусса является усовершенствованным методом алгебраического сложения, приводящим к треугольной системе уравнений вида

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = d_1 \\ \qquad\quad c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad c_{33}x_3 = d_3 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения этой системы находим x_3 и подставляем во второе уравнение. Тогда из него находим неизвестную x_2. Значения неизвестных x_2 и x_3 подставляем в первое уравнение и после этого из него находим неизвестную x_1. Решением является тройка найденных чисел (x_1, x_2, x_3).

Метод Крамера состоит в применении формул Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – главный определитель системы;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} -$$

вспомогательные определители системы.

Метод обратной матрицы состоит в применении матричной формулы

$$X = A^{-1}B.$$

Здесь $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов системы;

$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ – обратная матрица для матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ коэффициентов системы; A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} главного определителя Δ системы.

Произведение матриц, допускающих перемножение, производится по мнемоническому формальному правилу «строка на столбец».

1.2. Образцы задач с решениями

1.2.1. Решите систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$ Отв. $(2;-1;1)$.

Решение. Решение ведем методом Гаусса с помощью матрицы коэффициентов системы, приводя ее первые три столбца к треугольному виду.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Первую строку прибавляем ко второй, а затем умножаем на минус единицу и прибавляем к третьей строке, получаем

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$. Вторую строку умножаем на минус два и прибавляем к третьей строке. Получаем

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$. На основе последней матрицы записываем полученную систему уравнений, деля последнее уравнение на минус десять. Получаем

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ \quad x_2 + 3x_3 = 2 \\ \quad\quad x_3 = 1 \end{cases}$. Подставляем во второе уравнение вместо неизвестной x_3 ее значение 1. Получаем $x_2 = -1$. Подставляем значения неизвестных x_1, x_2 в первое уравнение и находим $x_1 = 2$. Ответ $(2;-1;1)$

1.2.2. В определителе $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ найдите алгебраическое дополнение A_{32}. Отв. –2.

Решение. В данном определителе вычеркиваем третью строку и второй столбец. Получаем минор $M_{23}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}$. Его вычисляем, применяя сначала элементарные преобразования. Третий столбец прибавляем ко второму. Получаем

$M_{23}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}$. Разлагаем этот определитель по первой строке. Получаем

$M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-1\cdot 1=2$. Так как сумма индексов минора равна 5 – нечетна, то минор и алгебраическое дополнение элемента определителя отличаются знаком.

Ответ: $A_{23}=-2$.

1.3. Задачи для Решения

1.3.1. Решите системы уравнений

1. $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=4,\\ 2x_1+x_2-3x_3=-2,\\ x_1+2x_2-x_3=-2.\end{cases}$ отв. $(1,-1,1)$.

2. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_2+2x_3=-1,\\ 2x_1-x_2+x_3=1.\end{cases}$ отв. $(1,2,1)$.

3. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ 2x_1+3x_2=-5,\\ x_1-x_2-2x_3=-4.\end{cases}$ отв. $(-1,-1,2)$.

4. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\ 2x_1+x_2=4,\\ 3x_1-x_2-2x_3=3.\end{cases}$ отв. $(1,2,-1)$.

1.3.2. Решить систему 4-х линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными методами Гаусса, Крамера, обратной матрицы. Заданы коэффициенты системы и свободные члены. Известны ответ и определитель системы. Работа самопроверяемая, ее целесообразно начать с проверки ответа. Каждый из 30 вариантов рекомендуется как индивидуальное расчетное задание.

1	2	3
$\left.\begin{array}{cccc\|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{cccc\|c} 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{cccc\|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right.$
$(1,-2,2,1);\Delta=18.$	$(-2,2,1,-1);\Delta=18.$	$(-1,2,1,2);\Delta=-6.$
4	5	6
$\left.\begin{array}{cccc\|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{cccc\|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{cccc\|c} 2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right.$
$(2,1,2,-1);\Delta=18.$	$(1,1,-1,2);\Delta=7.$	$(-2,1,2,1);\Delta=33.$

1.3.3. Решить систему алгебраических уравнений третьего порядка методами Гаусса, Крамера, обратной матрицы, вычислив свободные члены уравнений по данным ответам и матрице коэффициентов системы. Рекомендуется как индивидуальное расчетное задание.

1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \\ 2 & -1 & 1 & \\ 1 & -2 & 2 & \end{array}\right)$ 2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \\ 1 & 2 & 1 & \\ -1 & 2 & 3 & \end{array}\right)$ 3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 1 & -2 & 4 & \end{array}\right)$ 4. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ -2 & 3 & 1 & \\ 1 & 2 & -1 & \end{array}\right)$;

$(1,-2,3);$ $(-1,2,2);$ $(2,1,3);$ $(-2,1,-1);$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & \\ 2 & 3 & -1 & \\ -1 & 2 & 4 & \end{array}\right)$ 6. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \\ 2 & 3 & -1 & \\ 2 & 1 & 3 & \end{array}\right)$ 7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \\ -1 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & \end{array}\right)$ 8. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \\ 1 & 2 & -1 & \\ 2 & 3 & 4 & \end{array}\right)$;

$(2,2,2);$ $(-2,3,1);$ $(1,-1,2);$ $(-2,1,3);$

1.3.3. В определителе найдите алгебраическое дополнение A_{23}

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, отв. 1. 2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, отв. -1.

1.3.4. Перемножьте матрицы

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $AB=?$ Отв. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $AB=?$ Отв. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.5. Решите уравнение 1. $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. Отв. $1/2$. 2. $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$. Отв. 1.

1.3.6. Вычислите определитель 1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. Отв. -4. 2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Отв. 6.

1.3.7. Вычислите AB, где

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Отв. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Отв. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.8. Вычислите A^2, где 1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Отв. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Отв. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1.4. Теоретические вопросы по линейной алгебре.

1. Какие системы линейных алгебраических уравнений называются определенными, неопределенными, несовместными?

2. Какой является квадратная система линейных алгебраических уравнений, если ее определитель равен нулю?

3. Какой должна быть система линейных алгебраических уравнений, чтобы ее можно было решать методом Крамера?

4. Система линейных алгебраических уравнений решается методом Гаусса. Как узнать, что она определенная, неопределенная, несовместная?

5. Что такое матрица? Какими могут быть матрицы?

6. Какие матрицы можно перемножать? Как они перемножаются?

7. Что такое определитель второго порядка?

8. Что такое определитель третьего порядка?

9. Что такое минор элемента a_{ik} определителя?

10. Что такое алгебраическое дополнение элемента a_{ik} определителя?

11. Что значит разложить определитель по элементам строки или столбца?

12. Какая матрица называется обратной по отношению к данной квадратной матрице?

13. Как записать крамеровскую систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме?

14. Как построить обратную матрицу для данной квадратной матрицы с определителем, отличным от нуля?

15. Запишите данную крамеровскую систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме и объясните смысл матриц, входящих в эту запись.