§ 3. Прямая на плоскости

В §3 представлены типов задач на прямую на плоскости, использующие все основные уравнения прямой, а также формулы расстояния между двумя точками, расстояния от точки до прямой, угла между прямыми. Каждый тип задач составлен в 12 вариантах.

3.1. Основные формулы для решения задач

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0 .$$

Его коэффициенты *A* и *B* имеют определённый геометрический смысл, они являются координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного прямой, определяемой этим уравнением. Этот вектор называется *нормальным вектором* к данной прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$

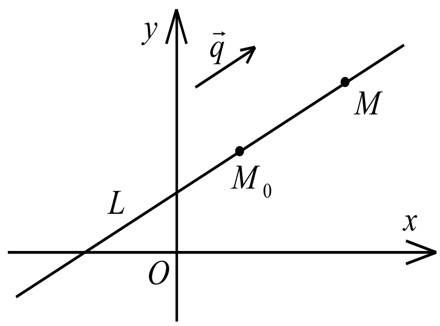
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} .$$

Каноническое уравнение прямой на плоскости.

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} .$$

Оно определяет

прямую *L*, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{q}(l, m)$, называемому её *направляющим вектором* (рис. 3.3, точка *M*(*x*, *y*) – текущая точка прямой).



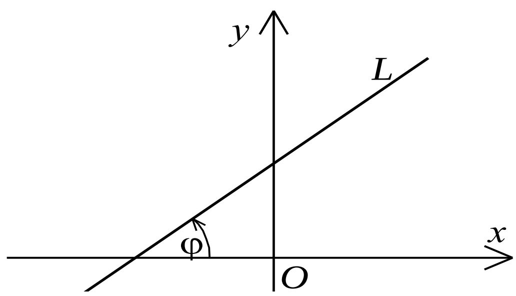
Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат *Oxy* и прямую *L* определяемую уравнением $Ax + By + C = 0$. Пусть в этом уравнении $B \neq 0$. При этом условии прямая *L* не параллельна оси *Oy*, а упомянутое уравнение приводится к виду

$$y = kx + b,$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$.

Коэффициент *k* из правой части уравнения равен тангенсу угла наклона φ прямой *L* к оси *Ox*. Он называется *угловым коэффициентом* этой прямой.

Углом наклона φ прямой *L* к оси *Ox* называется наименьший угол поворота этой оси, производимого вокруг точки пересечения *Ox* и *L* в направлении против часовой стрелки до совмещения *Ox* с *L* .



Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ и имеющую заданный угловой коэффициент k

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Формула для тангенса угла между двумя прямыми.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями с угловым коэффициентом: $L_1 : y = k_1 x + b_1, \quad L_2 : y = k_2 x + b_2$.

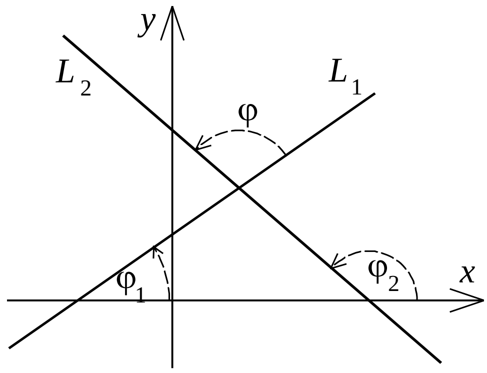
Условие параллельности таких прямых следует из условия равенства углов наклона φ_1 и φ_2 этих прямых к оси *Ox*. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$, то приходим к следующему утверждению: $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Для угла φ между прямыми L_1 и L_2, понимаемого как угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой L_1 до совмещения с прямой L_2 (рис. 4.1), имеем формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

где $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1, k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$.

Если $1 + k_1 k_2 = 0$, то $\operatorname{ctg}\varphi = 0$, следовательно, угол φ равен $\pi/2$, и данные прямые перпендикулярны. Итак, любое из следующих равенств $k_1 k_2 + 1 = 0$ или $k_1 = -1/k_2$ является условием перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

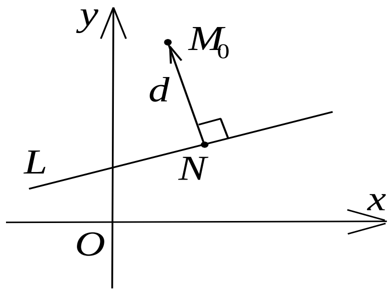


Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат и заданы прямая *L*: $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$, не принадлежащая *L*.

Расстоянием d от точки M_0 до прямой *L* называется длина отрезка M_0N, где $N(x_1, y_1)$– проекция точки M_0 на данную прямую (рис. 5.1). Для *d* имеем формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



3. 2. Образцы задач с решениями

Задача 1. Даны две точки $A(-4,-2)$ и $B(1,4)$. Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс. Отв. $x=-7/3$.

Решение. Применяем уравнение прямой через две точки

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

$$\frac{x-(-4)}{1-(-4)}=\frac{y-(-2)}{4-(-2)}, \quad 6(x+4)=5(y+2).$$ Полагаем в этом уравнении $y=0$. Получаем нужную абсциссу, $6x+24=10$, $x=-7/3$.

Задача 2. Дан треугольник своими вершинами $A(-2,-4), B(2,-3), C(3,4)$. Найдите ординату точки пересечения высоты CD с осью ординат. Отв. 16 .

Решение. Используя уравнение прямой через две точки A, B, составляем уравнение прямой AB: $\dfrac{x-(-2)}{2-(-2)}=\dfrac{y-(-4)}{-3-(-4)}$,

$x+2=4(y+4)$. Находим угловой коэффициент прямой AB, $K_{AB}=\frac{1}{4}$. Угловой коэффициент перпендикулярной прямой CD находим по формуле $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-4$. Далее применяем уравнение прямой через данную точку C с угловым коэффициентом k_{CD}. $y-y_C=k_{CD}(x-x_C)$, $y-4=-4(x-3)$. В этом уравнении полагаем $x=0$. Получаем нужную ординату. $y=16$.

Задача 3. Найдите проекцию точки $P(1,5)$ на прямую $2x+5y+3=0$. Отв. $\left(-\frac{31}{29},-\frac{5}{29}\right)$.

Решение. Находим угловой коэффициент данной прямой $K_1=-\frac{2}{5}$. Находим угловой коэффициент перпендикулярной прямой $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{5}{2}$. Составляем уравнение прямой через точку P с угловым коэффициентом k_2: $y-5=\frac{5}{2}(x-1)$. Находим точку пересечения данной и построенной прямой. Она и есть искомая. Для этого решаем систему уравнений $\begin{cases}2x+5y+3=0\\5x-2y+5=0\end{cases}$.

Получаем $x=-\frac{31}{29}; y=-\frac{5}{29}$.

Задача 4. Дан треугольник своими вершинами $A(-3,-4)$, $B(5,-2)$ $C(2,4)$. Найдите ординату точки $M(0,y_0)$ прямой CM, параллельной AB. Отв. $y_0=\frac{7}{2}$.

Решение. Составляем уравнение прямой через две точки A,B.

$\frac{x-(-3)}{5-(-3)}=\frac{y-(-4)}{-2-(-4)}$, $2(x+3)=8(y+4)$ и находим угловой

коэффициент этой прямой $k_{AB}=\frac{1}{4}$. В силу условия

параллельности угловой коэффициент прямой $CM-$ тот же,

$k_{CM}=\frac{1}{4}$. Далее применяем уравнение прямой через точку C с

угловым коэффициентом k_{CM}: $y-4=\frac{1}{4}(x-2)$. В этом

уравнении полагаем $x=0$ и находим $y_0=\frac{7}{2}$.

Задача 5. Найдите модуль тангенса угла между прямыми

$x+4y+1=0$ и $x-2y+3=0$. Отв. $\frac{2}{7}$.

Решение. Применяем формулу для тангенса угла между прямыми

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{2}{7}.$$

3.3. Задачи для решения

Прямая через две точки

1. Даны две точки $A(-3,-2)$ и $B(1,-4)$. Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс. Отв. -7.

2. Даны две точки $A(-2,-3)$ и $B(2,-2)$. Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс. Отв. 10.

3. Даны две точки $A(-4,-2)$ и $B(2,-4)$. Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс. Отв. -10.

4. Даны две точки $A(-3,-2)$ и $B(3,-6)$. Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс. Отв. -6.

Уравнение прямой через данную точку и с данным угловым коэффициентом

1. Дан треугольник своими вершинами $A(-3,-2)$, $B(1,-4)$, $C(2,3)$. Найдите ординату точки пересечения высоты CD с осью ординат. Отв. -1.
2. Дан треугольник своими вершинами $A(-2,-3)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$. Найдите ординату точки пересечения высоты CD с осью ординат. Отв. 7.
3. Дан треугольник своими вершинами $A(-4,-2)$, $B(2,-4)$, $C(1,3)$. Найдите ординату точки пересечения высоты CD с осью ординат. Отв. 0.
4. Дан треугольник своими вершинами $A(-3,-2)$, $B(3,-6)$, $C(2,3)$. Найдите ординату точки пересечения высоты CD с осью ординат. Отв. 0.

Условие параллельности и перпендикулярности прямых; угол между прямыми

1. Найдите проекцию точки $P(2,6)$ на прямую $x+2y+1=0$. Отв. $(-1,0)$.
2. Найдите проекцию точки $P(1,9)$ на прямую $x+2y+1=0$. Отв. $(-3,1)$.
3. Найдите проекцию точки $P(1,14)$ на прямую $x+2y+1=0$. Отв. $(-5,2)$.
4. Найдите проекцию точки $P(2,1)$ на прямую $x+2y+1=0$. Отв. $(1,-1)$.

3.4. Теоретические вопросы

1. Прямая L задана уравнением с угловым коэффициентом $y=\kappa x+в$.

Поясните геометрический смысл к и в.

2. Что называется уравнением пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$. Напишите уравнение этого пучка.

3. Уравнение $y = \kappa x + 2\kappa + 1$ - есть уравнение пучка прямых. Укажите его центр. Какую прямую не содержит этот участок?

4. Напишите уравнение прямой, проходящей через 2 точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

5. Напишите общее уравнение прямой.

6. Пусть даны 2 прямые: L_1: $y = k_1 x + l_1$, L_2: $y = k_2 x + l_2$. Чему равен тангенс угла между прямыми: L_1 и L_2?

7. Прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями L_1: $y = k_1 x + l_1$, L_2: $y = k_2 x + l_2$. Напишите условия параллельности и перпендикулярности этих прямых.

8. Напишите формулу для нахождения расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой Ax + By +C=0.

9. Как геометрически объяснить, что система уравнений $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ является неопределённой?

10. Как геометрически объяснить, что система уравнений $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ является несовместной?

11. Как геометрически объяснить, что система уравнений $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ является определённой?

12. Каков геометрический смысл коэффициентов *A и B* уравнения прямой *Ax + By +C = 0?*

13. Какое положение на плоскости занимает прямая *Ax +By +C = 0,* если *B = 0 ?*

14. Какое положение на плоскости занимает прямая *Ax +By +C = 0,* если *C = 0?*