§ 4. Прямая и плоскость в пространстве

4.1. Основные формулы для решения задач

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = \left(A, B, C\right)$

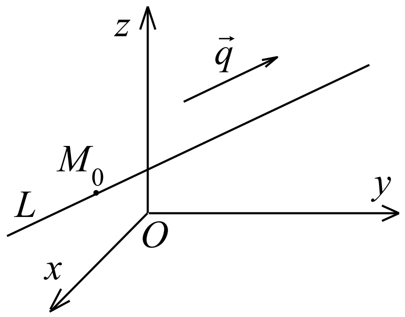
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Канонические уравнения прямой L:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка, через которую проходит прямая.

$\vec{q}(l,m,n)$ - направляющий вектор прямой, это вектор, коллинеарный прямой.



Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0,\ t \in \mathbf{R} \\ z = nt + z_0, \end{cases}$$

Обозначения – те же.

Уравнение плоскости через три заданные точки

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. 2. Образцы задач с решениями

Задача 1. Составьте уравнения в параметрической форме для прямой, проходящей через две точки $A(-2,-4,1)$ и $B(3,2,4)$. Укажите точку M прямой при значении параметра $t=1$.

Решение. Находим направляющий вектор прямой, идущий из точки A в точку B: $\overline{q} = (5,6,3)$. Применяем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A с направляющим вектором $\overline{q} = (5,6,3)$:

$$\begin{cases} x = 5t - 2 \\ y = 6t - 4. \\ z = 3t + 1 \end{cases}$$

При $t=1$ имеем точку $M(3,2,4)$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ и точку $C(2,3,4)$.

Решение. Проще всего взять две точки на прямой, скажем при $t=1$ и $t=0$. Получаем две точки $M(3,2,4)$ и $N(-2,-4,1)$. Через три точки M, N, C проводим нужную плоскость, пользуясь уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-4 \\ -2-3 & -4-2 & 1-4 \\ 2-3 & 3-2 & 4-4 \end{vmatrix} = 0;$$

Разлагаем определитель по первой строке

$$(x-3)\begin{vmatrix}6 & 3\\ 1 & 6\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}5 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}+(z-4)\begin{vmatrix}5 & 6\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0;$$ Отсюда

$$3x+3y-11z+29=0.$$

Проверка показывает, что три точки M,N,C лежат на построенной плоскости.

4.3. Задачи для решения

Параметрические уравнения прямой

1. Составьте уравнения в параметрической форме для прямой, проходящей через две точки $A(-3,-2,1)$ и $B(2,1,3)$. Укажите точку M прямой при значении параметра $t=1$. Отв. $x=5t-3,\ y=3t-2,\ z=2t+1;\quad M(2,1,3)$.

2. Составьте уравнения в параметрической форме для прямой, проходящей через две точки $A(-1,2,1)$ и $B(1,-2,3)$. Укажите точку M прямой при значении параметра $t=1$.

Отв. $x=2t-1,\ y=-4t+2,\ z=2t+1;\quad M(1,-2,3)$.

3. Составьте уравнения в параметрической форме для прямой, проходящей через две точки $A(-2,1,-3)$ и $B(1,2,3)$. Укажите точку M прямой при значении параметра $t=1$.

$$\begin{cases} x=5t-2\\ y=6t-4\\ z=3t+1\end{cases}$$

Отв. $x=3t-2,\ y=t+1,\ z=6t-3;\quad M(1,2,3)$.

4. Составьте уравнения в параметрической форме для прямой, проходящей через две точки $A(1,-2,1)$ и $B(-1,2,3)$. Укажите точку M прямой при значении параметра $t=1$.

Отв. $x=-2t+1,\ y=4t-2,\ z=2t+1;\quad M(-1,2,3)$.

Плоскость через прямую и точку

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ и точку $C(1,2,2)$. Отв. $x+y-z-1=0.$
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$ и точку $C(1,-2,1)$. Отв. $x+y-5z+6=0.$
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ и точку $C(1,2,3)$. Отв. $7x-3y+z-4=0.$
4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$ и точку $C(1,-1,2)$. Отв. $3x-4y+2z-11=0.$

4.4. Теоретические вопросы

1. Прямая L задана векторным уравнением $\bar{r}=t\overline{s_0}+\overline{r_0}$. Каков геометрический смысл входящих в уравнение величин $\bar{r},\bar{s},\overline{r_0}$?
2. Прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{t-t_0}{p}$. Каков геометрический смысл коэффициентов ***m, n, p*** и чисел x_0, y_0, z_0?
3. Напишите уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(3,-4,5)$ и $M_2(2,-3,7)$.
4. Даны плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. Как найти угол между плоскостью и прямой?
5. Даны плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. При каком условии плоскость и прямая параллельны?
6. Напишите условие перпендикулярности прямых $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$.

7. Дана прямая L: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскость P: $Ax+By+Cz+D=0$.

    Опишите алгоритм нахождения координат точки пересечения прямой и плоскости.
8. Напишите общее уравнение плоскости. Каков геометрический смысл коэффициентов уравнения?
9. Запишите параметрические уравнения прямой. Укажите геометрический смысл параметров, входящих в уравнения.
10. Даны плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. При каком условии плоскость и прямая перпендикулярны?
11. Запишите уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$.
12. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A,B,C)$.