§8. Непрерывность функции

8.1. Основные формулы и определения для решения задач

Определение. Функция $f\left(x\right)$ называется непрерывной в точке x_0, если

1) она определена в окрестности точки x_0, а следовательно и в самой точке x_0,
2) существует конечный предел функции в точке $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0-0\right)=f\left(x_0+0\right)$,
3) выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, т.е. этот предел равен значению функции в точке.

Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в ней нарушено хотя бы одно из трёх условий определения функции, непрерывной в точке.

При этом различают следующие случаи.

1°. Существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но либо $f(x)$ не определена при $x=x_0$, либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. В этом случае x_0 называют точкой *устранимого разрыва* данной функции.

Функцию $f(x)$ с устранимым разрывом в точке x_0 можно доопределить или переопределить, приняв за её значение в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Построенная таким образом функция

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & \text{при } x\neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{при } x=x_0 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке x_0. В этой связи точку x_0 и называют точкой устранимого разрыва.

2°. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, но при этом существуют оба односторонних конечных предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, очевидно, не равные друг другу. Точка x_0 называется точкой *разрыва 1–го рода*, а разность $f(x_0-0) - f(x_0+0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

3°. В точке x_0 функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ или хотя бы один из них бесконечен. Точка x_0 называется точкой *разрыва 2–го рода*.

8.2. Образцы решения задач

Задача 1. Укажите точку x_0 разрыва функции $y=\frac{tgx^2}{x^2}$ и определите ее род, вычислив в ней пределы слева и справа.

Решение. Точка $x=0$ является точкой разрыва функции, так как в ней числитель и знаменатель функции равны нулю. Функция в этой точке не определена. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$. Согласно классификации точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва.

Задача 2. При каком значении параметра λ функция $y=\begin{cases} x^3 & ; \quad x\le 0, \\ \lambda + x & ; \quad x>0 \end{cases}$ будет непрерывной? Постройте ее график.

Решение. Точка $x=0$ является точкой соединения двух аналитических выражений, поэтому может быть точкой разрыва при ненадлежащем значении параметра λ. Вычисляем пределы функции слева и справа в точке $x=0$:

$$f(-0)=\lim_{x\to 0}x^3=0;\ f(+0)=\lim_{x\to 0}(\lambda+x)=\lambda.\ f(-0)=f(+0)=\lambda=0.$$

8.3. Варианты задач для решения

Задача 1. Укажите точку x_0 разрыва функции $y=\frac{\sin x^2}{x^2}$ и определите ее род, вычислив в ней пределы слева и справа.

1. $y=\dfrac{\sin x^2}{x^2}$ Отв. Устранимый разрыв в точке 0.	3. $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ Отв. Разрыв 2-го рода; $f(1-0)=0,\ f(1+0)=+\infty.$
2. $y=\dfrac{arc\sin x^2}{x^2}$ Отв. Устранимый разрыв в точке 0.	4. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ Отв. Разрыв 2-го рода; $f(1-0)=+\infty,\ f(1+0)=+\infty.$

Задача 2. При каком значении параметра λ функция $y=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\ge 0, \\ \lambda+x & \text{при } x>0 \end{cases}$ будет непрерывной? Постройте ее график.

1. $y=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\ge 0, \\ \lambda+x & \text{при } x>0 \end{cases}$ Отв. $\lambda=0.$ 2. $y=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\le 1, \\ \lambda-x^2 & \text{при } x>1 \end{cases}$

Отв. $\lambda=2.$

3. $y=\begin{cases} x^2-1 & \text{при } x\le 1, \\ \lambda-x^2 & \text{при } x>1 \end{cases}$ Отв. $\lambda=1.$ 4. $y=\begin{cases} \lambda-x & \text{при } x\le 1, \\ x & \text{при } x>1 \end{cases}$

Отв. $\lambda=2.$

Подобрав соответствующее значение параметра C, устраните разрыв функции

5. $y=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{при } x\ne 0, \\ C & \text{при } x=0. \end{cases}$ Отв. $C=3.$ 6. $y=\begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} & \text{при } x\ne 0, \\ C & \text{при } x=0. \end{cases}$

Отв. $C=2.$

7. $y=\begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{при } x\ne 0, \\ C & \text{при } x=0. \end{cases}$ Отв. $C=0.$ 8. $y=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{при } x\ne 0, \\ C & \text{при } x=0. \end{cases}$

Отв. $C=2.$

8.4. Теоретические вопросы

1. Какая точка называется точкой разрыва функции?

2. Дайте определение понятия - точка $x = a$ является точкой устранимого разрыва функции $f(x)$.

3. Дайте определение понятия - точка $x = a$ является точкой разрыва первого рода функции $f(x)$.

4. Дайте определение понятия - точка $x = a$ является точкой разрыва второго рода функции $f(x)$

5. Сформулируйте первую теорему Больцано-Коши.

6. Сформулируйте вторую теорему Больцано-Коши.

7. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.

8. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса.

9. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке.

10. Сформулируйте определение непрерывности функции на промежутке.

11. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы, разности, произведения функций.

12. Сформулируйте теорему о непрерывности частного функций.