§9. Производная и дифференциал

9.1. Основные формулы и определения для решения задач

Определение Пусть функция $y = f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует и конечен, называется *производной* этой функции в точке x_0 и обозначается символами: $f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, y'(x_0), \frac{dy}{dx}_{|x=x_0}, \dot{y}$. Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Геометрически производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 интерпретируется как *угловой коэффициент касательной*, проведённой к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Уравнение касательной *T :*

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0); \quad \left(y'(x_0) \neq 0\right).$$

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0. Если её приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \qquad (1)$$

где множитель *A* зависит от x_0, но не зависит от Δx, а $o(\Delta x)$– величина более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$, то данная функция называется *дифференцируемой* в точке x_0, а слагаемое $A \cdot \Delta x$ называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается следующим образом:

$df(x_0),\ dy(x_0),\ dy_{|x=x_0},\ dy$. Итак, d$y$= A·Δx.

Дифференциал dy = A·Δx при $A \neq 0$ есть главная часть приращения функции $y = f(x)$, линейная относительно Δx, при этом Δy и dy эквивалентные бесконечно малые при $\Delta x \to 0$. Если $A = 0$, то $dy = 0$ при любых значениях Δx, а $\Delta y = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Теорема 1 (*необходимое и достаточное условие дифференцируемости*). Функция y=f(x) дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную $y'(x_0)$.

Следствие из теоремы 1. Для функции y=f(x), дифференцируемой в точке x_0, множитель A в равенстве (1) определяется единственным образом, а именно: $A = y'(x_0)$.

В силу определения и следствия из теоремы имеем:

$$dy = y'(x_0)\Delta x. \qquad (2)$$

Из формулы (2), в частности, при $y \equiv x$ следует, что $dx = (x)'\Delta x = \Delta x$, т.е. дифференциал аргумента равен его приращению:

$$dx = \Delta x. \qquad (3)$$

Поэтому равенство (2) можно переписать в виде:

$$dy = y'(x_0)dx.$$

Замечание. Вычисление производной и дифференциала функции в данной точке принято называть одним термином **–** *дифференцирование*.

Таблица производных

$$(x^a)' = a x^{a-1}, \quad x > 0, \ \forall a \in \boldsymbol{R}, \quad (1)$$

в частности, $$(1/x)' = -1/x^2, \ a = -1, \quad (2)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ a = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ \ x \in \boldsymbol{R}, \ a > 0, a \neq 1, \quad (4)$$

в частности, $$(e^x)' = e^x. \quad (5)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ x > 0, \ \ a > 0, a \neq 1, \quad (6)$$

в частности, $$(\ln x)' = 1/x. \quad (7)$$

$$(\sin x)' = \cos x, \ \ x \in \boldsymbol{R}. \quad (8)$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \ x \in \boldsymbol{R}. \quad (9)$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \quad (10)$$

$$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \quad (11)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \ x \in (-1, 1). \quad (12)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \ x \in (-1, 1). \quad (13)$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \ \ x \in \boldsymbol{R}. \quad (14)$$

$$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \ x \in \boldsymbol{R}. \quad (15)$$

$$(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x, \ \ (\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x, \ \ x \in \boldsymbol{R}, \quad (16)$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},\ \forall x \in \boldsymbol{R},\ (\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x},\ x \in \boldsymbol{R}, \text{ кроме } x = 0. \quad (17)$$

Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции *x*.

$$(C)' = 0, \text{ где } C - \text{const}. \quad (18)$$

$$(Cu)' = Cu', \text{ где } C - \text{const}. \quad (19)$$

$$(u+v)' = u' + v'. \quad (20)$$

$$(uv)' = u'v + uv'. \quad (21)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \quad (22)$$

Если *y*=*y*(*u*), а *u*=*u*(*x*), то

$$y'_x(u(x)) = y'_u(u) \cdot u'_x(x). \quad (23)$$

Параметрическое задание функции уравнениями

$x = x(t); y = y(t)$. Тогда $y'_x = \dfrac{y'_t(t)}{x_t(t)}$. (24)

9.2. Образцы задач с решениями

Задача1 . Найти производную функции, заданной параметрически:

$\begin{cases} x = \sin^5 t, \\ y = \cos^5 t. \end{cases}$ Вычислить её значение при $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Применяем правила дифференцирования и таблицу производных. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{5\sin^4 t\cos t}{5\cos^4 t\left(-\sin t\right)} = -tg^3 t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$

Задача 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$ и вычислите для него значение y при $x = 0$.

Решение. Находим производную $y' = 3x^2 - 8x + 5$. Угловой коэффициент касательной $k = y'\left(2\right) = 12 - 16 + 5 = 1$. Составляем уравнение касательной к графику функции в точке $M_0\left(2;0\right)$: $y = 2\left(x-2\right)$. $y = -4$ при $x = 0$.

Задача.3. $y = \sqrt{2 + x^4}$. Найдите dy при $x = 1$ и $dx = 0.1$.

Решение. $dy = y'dx = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x^4}}dx\Big|_{\substack{x=1\\ dx=0,1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}0,1.$

9.3. Задачи для решения

Задача1 . Найти производную функции, заданной параметрически:

1. $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$ Отв. -1.	3. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$ Отв. 0.
2. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ Отв. 1.	4. $\begin{cases} x = \ln t - 1/t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$ Отв. 2.

Задача 2. Составьте уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 и вычислите для него значение y при $x = 0$.

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. $x_0 = 2$. Отв. $y - 3 = 4\left(x-2\right)$; $y = -5$.
2. $y = (x^2+1)^{-1}$. $x_0 = 1$. Отв. $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x-1)$; $y = 1$.

Составьте уравнение нормали к графику функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и вычислите для него значение y при $x = 0$.

3.	$y = x^3 + 2x^2 - x - 1$. Отв. $y - 1 = -\frac{1}{6}(x-1); y = \frac{7}{6}$.
4.	$y = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$. Отв. $y + 1 = -(x-1); y = 0$.

Задача 3. Дана функция. Найдите dy при $x = 1$ и $dx = 0.1$.

1. $y = \sqrt{3 + x^3}$. Отв. 0.075.	3. $y = (x^2 + 1)\ln x$. Отв. 0.2.
2. $y = (1 + 3x)\ln x$.Отв. 0.4.	4. $y = 4x\,\mathrm{arctg}\,x$. Отв. $0.1(\pi + 2)$.

9.4. Теоретические вопросы

1. Производная функции $f(x)$ в точке x_0. Определение. Механический смысл.
2. Производная функции $f(x)$ в точке x_0. Определение. Геометрический смысл.
3. Напишите таблицу производных функций: $x^\alpha, e^x, a^x, tgx, ctgx$, $\cos ax$.
4. Напишите таблицу производных функций: $\arcsin x, \arccos x$, $arctgx, arcctgx$, $\sin ax$.
5. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
6. Напишите правило для вычисления производной сложной функции $y = f(u(x))$.
7. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Напишите, чему равна $\frac{dy}{dx}$.
8. Напишите правила для вычисления производных суммы, произведения и частного функций $u(x)$ и $v(x)$.
9. Пусть $u'(x) = -v'(x)$. Как связаны между собой функции $u(x)$ и $v(x)$?.
10. Пусть $u'(x) = v'(x)$. Как связаны между собой функции $u(x)$ и $v(x)$?.

11. Функция $f(x)$ имеет производную точке x_0. Напишите уравнение касательной к графику функции в этой точке.
12. Функция $f(x)$ имеет производную точке x_0, отличную от нуля. Напишите уравнение нормали к графику функции в этой точке.
13. Сформулируйте определение производной функции порядка *n*.
14. Что называется дифференциалом функции?

15. Раскройте содержание понятия «инвариантность формы дифференциала первого порядка сложной функции».
16. Дифференциал второго порядка. Определение.
17. Пусть $df(x_0) \neq 0$. Как связаны между собой дифференциал функции и ее приращение в этой точке?.
18. Пусть $y = f(x)$, x –независимая переменная. Тогда $d^5 f(x) = \ldots..$.
19. Геометрический смысл дифференциала первого порядка .
20. Пусть $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Выразите дифференциал $f(x)$ через дифференциалы функций $u(x)$ и $v(x)$.
21. Пусть $f(x) = u(x)/v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Выразите дифференциал $f(x)$ через дифференциалы функций $u(x)$ и $v(x)$.
22. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.
23. Приведите пример функции, непрерывной в некоторой точке, но не имеющей в этой точке производной.
24. Как соотносятся понятия непрерывность и дифференцируемость функции?