

§ 11. Обобщенная зачетная работа по математике за 1-й семестр

ОБРАЗЕЦ

Линейная алгебра

1. Решите систему
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \quad \text{Отв. } (2; -1; 1).$$

2. В определителе
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
 найдите алгебраическое дополнение A_{32} . Отв. -2 .

Аналитическая геометрия

3. Даны две точки $A(1;2)$ и $B(-3; -2)$. Составьте уравнение прямой AB и найдите абсциссу точки ее пересечения с осью абсцисс. Отв. $y = x + 1; \quad x = -1$.

4. Дан треугольник своими вершинами $A(-2;-3)$, $B(1;1)$, $C(3;-1)$. Составьте уравнение высоты BD и найдите ординату точки ее пересечения с осью ординат.

Отв. $y = -2,5x + 3,5; \quad y = 3,5$.

5. Дан треугольник своими вершинами $A(-2;-3)$, $B(1;1)$, $C(3;-1)$. Составьте уравнение прямой CM , параллельной AB , и вычислите ординату точки M пересечения прямой CM с

осью ординат. Отв. $y = \frac{4}{3}x - 5; \quad y = -5$.

6. Составьте уравнения в параметрической форме для прямой, проходящей через две точки

$A(-2;3;1)$ и $B(2;-2;-1)$. Найдите точку M пересечения прямой с плоскостью xOy .

Отв. $x = 4t - 2; \quad y = -5t + 3; \quad z = -2t + 1; \quad M(0;0,5;0)$.

7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$ и точку

$C(-2;2;1)$. Вычислите аппликату z точки плоскости при $x = y = 1$.

Отв. $x - y + z + 3 = 0; \quad z = -3$.

Векторная алгебра

8. Найдите проекцию вектора $\vec{a} = (1; 2; -3)$ на направление вектора $\vec{b} = (-2; 1; 3)$.

Отв. $-9/\sqrt{14}$.

9. С помощью векторного произведения найдите площадь параллелограмма, построенного на двух векторах $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 3)$. Отв. $\sqrt{115}$.

10. С помощью смешанного произведения найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 3)$, $\vec{c} = (-1; 2; 1)$ как на сторонах. Отв. 2 .

Математический анализ

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x + 1}}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$. Отв. 3.

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-3x}}{\sin 5x}$. Отв. $\frac{3}{5}$.

13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 2x)^{-1/\sin x}$. Отв. e^{-2} .

14. При каком значении λ бесконечно малые $\alpha = \sqrt{1 + 4x} - 1$ и $\beta = \sin \lambda x$ будут эквивалентными при $x \rightarrow 0$? Отв. $\lambda = 2$.

15. Укажите точку разрыва функции $f(x) = e^{1/x}$ и определите ее род, вычислив в ней пределы слева и справа. Отв. $x = 0$; $f(-0) = 0$; $f(+0) = +\infty$. Точка разрыва 2-го рода.

16. При каком значении параметра λ функция $y = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{при } x \leq 0 \\ \lambda - x & \text{при } x > 0 \end{cases}$ будет

непрерывной? Отв. $\lambda = 4$.

17. Найдите производную функции $y = 5 \operatorname{tg}^3 \frac{1}{x^2}$. Отв. $y' = -30 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3}$.

18. Найдите производную функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = te^{-t} \\ y = t + e^{2t} \end{cases}$.

Вычислите ее при $t = 0$. Отв. $y'_x = \frac{1 + 2e^{2t}}{e^{-t} - te^{-t}}$. $y'_x(0) = 3$.

19. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = (x+1)^3$ в точке с абсциссой

$x_0 = 1$. Найдите ординату точки пересечения касательной с осью ординат.

Отв. $y = 12x - 4$; $y = -4$.

20. Найдите дифференциал $dy = y'dx$ функции $y = x \ln x$. Вычислите его при

$x = 1$; $dx = 0,1$. Отв. $y' = 1 + \ln x$; $dy = y'dx = (1 + \ln x)dx \Big|_{\substack{x=1 \\ dx=0,1}} = 0,1$.

Варианты обобщенной зачетной работы по математике за 1-й семестр
Вариант 1.

1	Решите систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$
2	Вычислите AB , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.
3	Даны две точки $A(-1, -1)$ и $B(-2, 3)$. Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс.
4	Дан треугольник своими вершинами $A(-2, -3)$, $B(2, -2)$, $C(1, 3)$. Найдите ординату точки пересечения высоты CD с осью ординат.
5	Дан треугольник своими вершинами $A(-2, -3)$, $B(2, 2)$, $C(3, -1)$. Найдите ординату точки $M(0, y_0)$ прямой CM , параллельной AB .
6	Составьте уравнения в параметрической форме для прямой, проходящей через две точки $A(-1, 2, 2)$ и $B(1, 1, 3)$. Укажите точку M прямой при значении параметра $t = 1$.
7	Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ и точку $C(1, -2, 0)$. Вычислите аппликату z точки плоскости $x = y = 1$.
8	Найдите проекцию вектора $\vec{a} = (2, 1, 2)$ на направление вектора $\vec{b} = (-3, 2, 1)$.
9	С помощью векторного произведения найдите площадь треугольника, построенного на двух векторах $\vec{a} = (-1, 2, -3)$ и $\vec{b} = (2, -1, 2)$, как на сторонах.
10	Вычислите смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$.
11	Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 3}}{x + 5}$.
12	Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 x}$.
13	Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{1/x}$.
14	Сравните бесконечно малые $\alpha = \frac{1 - \cos x}{x}$ и $\beta = \sin x$ при $x \rightarrow 0$.
15	Укажите точку x_0 разрыва функции $y = e^{1/x}$ и определите ее род, вычислив в ней пределы слева и справа.
16	Подобрав соответствующее значение параметра C , устраните разрыв функции $y = \begin{cases} e^{-1/ x } & \text{при } x \neq 0, \\ C & \text{при } x = 0. \end{cases}$
17	Найдите производную функции $y = \arccos \sqrt{1 - 3x}$. Вычислите значение $y' \left(\frac{1}{6} \right)$.
18	Найдите производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$ Вычислите её значение при $t = \frac{\pi}{4}$.
19	Составьте уравнение нормали к графику функции $y = (x^2 + 2)^{-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и вычислите для него значение y при $x = 0$.
20	$y = (1 + 3x) \ln x$. Найдите dy при $x = 1$ и $dx = 0.1$.

Вариант 2.

1	Решите систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$
2	Перемножьте матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $AB = ?$
3	Даны две точки $A(-1, -2)$ и $B(-3, 2)$. Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс.
4	Дан треугольник своими вершинами $A(2, 3)$, $B(-2, 2)$, $C(1, -3)$. Найдите ординату точки пересечения высоты CD с осью ординат.
5	Найдите проекцию точки $P(1, 9)$ на прямую $x + 2y + 1 = 0$.
6	Составьте уравнения в параметрической форме для прямой, проходящей через две точки $A(-1, -2, 2)$ и $B(2, -1, 3)$. Укажите точку M прямой при значении параметра $t = 1$.
7	Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ и точку $C(1, 2, -1)$. Вычислите аппликату z точки плоскости $x = y = 1$.
8	Найдите значение параметра λ , при котором векторы $\vec{a} = (\lambda, 2, -3)$ и $\vec{b} = (2, -3, 1)$ будут перпендикулярны.
9	С помощью векторного произведения найдите площадь треугольника, построенного на двух векторах $\vec{a} = (1, -1, -3)$ и $\vec{b} = (3, 3, 1)$, как на сторонах.
10	Вычислите смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$.
11	Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2x - x^2}{2x^2 - 3x + 1}$.
12	Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \ln(1+x)}$.
13	Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{-1/x^2}$.
14	При каком значении параметра p бесконечно малые $\alpha = 1 - \cos x$ и $\beta = \sin^p x$ будут одного порядка для $x \rightarrow 0$?
15	Укажите точку x_0 разрыва функции $y = \begin{cases} 2-x & \text{при } x \leq 2, \\ 1+x & \text{при } x > 2 \end{cases}$ и определите ее род, вычислив в ней пределы слева и справа.
16	При каком значении параметра λ функция $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0, \\ \lambda + x & \text{при } x < 0 \end{cases}$ будет непрерывной? Постройте ее график.
17	Найдите производную функции $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. Вычислите значение $y'(2)$.
18	Найдите производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^5 t. \end{cases}$ Вычислите её значение при $t = \frac{\pi}{4}$.
19	Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 + x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и вычислите для него значение y при $x = 0$.
20	$y = 4(x^2 + x + 2)^{-1}$. Найдите dy при $x = 1$ и $dx = 0.1$.