## §2. Векторная алгебра

В §2 представлены три типа задач на векторы, охватывающие скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Каждый тип задач составлен в 12 вариантах.

### 2.1.Основные формулы для решения задач

Скалярное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ есть число, обозначаемое символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и вычисляемое по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, где $\theta-$угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$.

Векторное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ есть третий вектор $\vec{c}$, определяемый тремя условиями

1) Длина вектора $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, где $\theta-$не направленный угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$.
2) Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a},\vec{b}$.
3) Тройка векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ является правой.

Векторное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ обозначается символом $a\times\vec{b}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ обозначается символом $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и вычисляется по формуле

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$. Смешанное произведение положительно, если тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая, и отрицательно, если – левая.

## 2. 2. Образцы задач с решениями

1). Найдите проекцию вектора $\bar{a} = (1;2;-3)$ на направление вектора $\bar{b} = (-2;1;3)$.

*Решение.* Применяем формулу для вычисления скалярного произведения с использованием проекции вектора на направление другого вектора. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta =$

$= |\vec{a}| np\vec{b}_{\vec{a}}$. Из нее получаем $|\vec{a}| np\vec{b}_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} =$

$$= \frac{1\cdot(-2) + 2\cdot 1 + (-3)\cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -\frac{9}{\sqrt{14}}.$$

Отв. $-9/\sqrt{14}$.

2). С помощью векторного произведения найдите площадь параллелограмма, построенного на двух векторах $\bar{a} = (1;2;-3), \bar{b} = (-2;1;3)$. Отв. $\sqrt{115}$.

*Решение.* Из определения векторного произведения следует, что его длина численно равна площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах как на сторонах. Тогда получаем площадь параллелограмма

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left|(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}\right| =$$

$$= \left|(2\cdot 3 - (-3)\cdot 1)\vec{i} - (1\cdot 3 - (-3)\cdot(-2))\vec{j} + (1\cdot 1 - 2\cdot(-2))\vec{k}\right| =$$

$$= |9\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}| = \sqrt{81 + 9 + 25} = \sqrt{115}.$$

3). С помощью смешанного произведения найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = (1;2;-3), \overline{b} = (-2;1;3), \overline{c} = (-1;2;1)$ как на сторонах. Отв. 2.

*Решение.* Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах как на сторонах. Тогда объем параллелепипеда

$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = |-10+12| = 2.$$

## 2.3. Задачи для решения

*Скалярное произведение векторов*

1. Найдите значение параметра $\lambda$, при котором векторы $\vec{a} = (\lambda, 2, 3)$ и $\vec{b} = (2, -1, 2)$ будут перпендикулярны. Отв. $-2$.
2. Найдите проекцию вектора $\vec{a} = (1, -1, 3)$ на направление вектора $\vec{b} = (3, 3, 1)$
Отв. $3/\sqrt{19}$
3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{b} = (2, -1, 2)$.
Отв. $2/\sqrt{14}$
4. Найдите работу силы $\vec{F} = (1, 2, 3)$ на пути из точки $A(-1, 1, 2)$ в точку $B(2, 2, 3)$. Отв. 8

*Векторное произведение векторов*

1. С помощью векторного произведения найдите площадь треугольника, построенного на двух векторах $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{b} = (2, -1, 2)$, как на сторонах.
Отв. $\sqrt{122}/2$

2. С помощью векторного произведения найдите площадь треугольника, построенного на двух векторах $\vec{a} = (1, 2, -3)$ и $\vec{b} = (3, -3, 1)$, как на сторонах.
Отв. $\sqrt{230}/2$
3. С помощью векторного произведения найдите площадь треуголь-

ника, построенного на двух векторах $\vec{a} = (-2, 1, 2)$ и $\vec{b} = (1, 1, 2)$, как на сторонах. Отв. $\sqrt{45}/2$

*4.* С помощью векторного произведения найдите площадь треугольника, построенного на двух векторах $\vec{a} = (1, -1, 3)$ и $\vec{b} = (3, 3, 1)$, как на сторонах. Отв. $\sqrt{50}$

*Смешанное произведение векторов*

1. С помощью смешанного произведения найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a} = (-1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$, $\vec{c} = (0, -1, 1)$, как на сторонах. Отв. 7
2. С помощью смешанного произведения найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (-1, -2, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, -1)$, как на сторонах. Отв. 0
3. С помощью смешанного произведения найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a} = (-2, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (2, 1, 1)$, как на сторонах. Отв. 10
4. С помощью смешанного произведения найдите объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a} = (-1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 2, 1)$, $\vec{c} = (2, 1, -1)$, как на сторонах. Отв. 1

**2.4. Теоретические вопросы**

1. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{в}$ коллинеарны, если …
2. При каких условиях $|\bar{a} + \bar{в}| = |\bar{a}| + |\bar{в}|$.
3. При каких условиях $|\bar{a} + \bar{в}| = |\bar{a}| - |\bar{в}|$.
4. При каких условиях $|\bar{a} + \bar{в}| = |\bar{в}| - |\bar{a}|$.
5. При каких условиях $|\bar{a} - \bar{в}| = |\bar{a}| - |\bar{в}|$.
6. При каких условиях $|\bar{a} - \bar{в}| = |\bar{b}| - |\bar{a}|$.
7. Что означает геометрически линейная независимость двух векторов?
8. Что означает геометрически линейная независимость трёх векторов?
9. Дайте определение понятию «линейная зависимость системы векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2} ... \overline{a_к}$».
10. Дайте определение понятию «линейная независимость системы векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2} ... \overline{a_к}$».

11. Какую тройку векторов ($\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$) можно считать базисом в пространстве $R^3$?
12. Дайте определение понятия «ортонормированный базис» в $R^3$.
13. Какую двойку векторов ($\overline{l_1}, \overline{l_2}$) можно считать базисом в пространстве $R^2$?
14. Почему тройку векторов ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{a}$), где $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$, нельзя считать базисом в пространстве $R^3$?
15. Почему двойку векторов ($\bar{i}, \bar{a}$), где $\bar{a} = x\bar{i}$, нельзя считать базисом в пространстве $R^2$?
16. Как получить единичный вектор для (ненулевого) вектора $\bar{a}$?
17. Под скалярным произведением 2-х векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ понимается …
18. Перечислите свойства скалярного произведения.
19. Выразите $пр_{\bar{a}}\bar{в}$ через скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$, и модуль вектора $\bar{a}$.
20. Выразите $пр_{\bar{в}}\bar{a}$ через скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$, и модуль вектора $\bar{в}$.
21. Сформулируйте необходимое и достаточное условие ортогональности 2-х ненулевых векторов?
22. Пусть $\bar{a} = \bar{a}(1,2,7)$, $\bar{в} = \bar{в}(4,3,0)$. Найдите косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{в}$.
23. Чему равняется скалярный квадрат вектора $\bar{a}$?
24. Запишите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты.
25. Укажите физический смысл скалярного произведения векторов.
26. Напишите формулу для косинуса угла $\varphi$ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ .?
27. В каком случае скалярное произведение векторов равно произведению их длин?

28. Пусть $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{в}$. Как расположен вектор $\bar{c}$ по отношению к векторам $\bar{a}$ и $\bar{в}$?
29. Каков геометрический смысл $|\bar{a} \times \bar{в}|$?
30. Перечислите свойства векторного произведения.
31. Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{в}$ и $\bar{c}$ - правая. Что это означает?
32. Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{в}$ и $\bar{c}$ - левая. Что это означает?
33. Что называется смешанным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{в}$ и $\bar{c}$?
34. Каков геометрический смысл модуля смешанного произведения $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$ векторов?

35. Перечислите свойства смешанного произведения, связанные с перестановкой сомножителей.
36. Запишите формулу, выражающую смешанное произведение векторов $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$ через координаты сомножителей.
37. Запишите формулу, выражающую векторное произведение векторов $\bar{a}\times\bar{в}$ через координаты сомножителей.
38. Выразите необходимое и достаточное условие компланарности трёх векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ через их смешанное произведение.
39. Выразите необходимое и достаточное условие линейной зависимости трёх векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ через их смешанное произведение.
40. Выразите необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\bar{a},\bar{b}$ через их векторное произведение.
41. Выразите необходимое и достаточное условие линейной зависимости двух векторов $\bar{a},\bar{b}$ через их векторное произведение.