Длина дуги кривой

1. Определения и формулы для решения задач

1^0. Длина дуги гладкой кривой, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

2^0. Если кривая задана уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ $(x = x(t), y = y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции)

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt,$$

где t_1 и t_2 - значения параметра, соответствующие концам дуги.

3^0. Если кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, то длина дуги

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

Замечание.

В ряде случаев задача о вычислении дуги кривой (спрямлении) приводит к интегралам которые не выражаются через элементарные функции. Это эллипс, гипербола, улитка Паскаля, лемниската и.т.д.

Пример.

Вычислить длину дуги эллипса $x = a\cos t, y = b\sin t$.

Решение. $l = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt,$ где $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет эллипса. Этот интеграл является неберущимся и может быть найден приближенно численными методами. Интеграл, к которому привела задача о длине эллипса называется *эллиптическим* . Этот интеграл подробно исследован и является частным видом класса эллиптических интегралов, для вычисления которых имеются также таблицы.

2.Задачи с решением.

1. Найти длину астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a.$

Решение.

Дифференцируя уравнение астроиды, получим: $y^{/}=-\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$

Поэтому для дуги одной четверти астроиды имеем

$$\frac{1}{4}l=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=\int_0^a\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=\frac{3}{2}a.\quad \text{Отсюда } l=6a.$$

2.Найти длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

Решение.

Имеем $x^{/}=a(1-\cos t)$ и $y^{/}=a\sin t.$ Поэтому

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a.$$

3.Найти длину всей кривой $r=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}.$

Решение.

Имеем $r^{/}=a\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$, потому длина всей дуги кривой

$$l=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=\frac{3\pi a}{2}.$$

4.Найти длину первого витка архимедовой спирали $r=a\varphi.$

Решение.

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right].$$

5. Вычислить длину дуги кривой $\varphi=\dfrac{1}{2}(r+\dfrac{1}{r})$ от $r=2$ до $r=4.$

Решение.

$$dl=\sqrt{r^2+(r_\varphi^{/})^2}d\varphi=\sqrt{r^2d\varphi^2+dr^2}=\sqrt{r^2(\frac{d\varphi}{dr})^2+1}dr\ .$$

Из уравнения кривой находим $\dfrac{d\varphi}{dr}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{r^2}).$ Следовательно,

$$l=\int_2^4\sqrt{r^2\frac{1}{4}(1-\frac{1}{r^2})^2+1}dr=\frac{1}{2}\int_2^4\sqrt{(r+\frac{1}{r})^2}dr=\frac{1}{2}(\frac{r^2}{2}+\ln r)\Big|_2^4=3+\frac{\ln 2}{2}.$$

6. Найти длину кардиоиды $r=2a(1-\cos\varphi).$

Решение.

Так как $r^{/}=2a\sin\varphi,\quad r^2+(r^{/})^2=16a^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2},$ получаем

$$l=\int_0^{\pi}4a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=-16a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=16a$$

3. Задачи

Вычислить длину дуги кривой

1. $y=\ln x$ от $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$. Ответ: $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

2. $y^2=x^3$ от $x_1=0$ до $x_2=1$ $(y\ge 0)$.Ответ: $\frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$

3. $y=x^2$ от $x_1=0$ до $x_2=1$. Ответ: $\frac{1}{4}\left[2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$

4. $y=\operatorname{ch}x$ от $x_1=0$ до $x_2=1$. Ответ: $\operatorname{sh}1$

5. $y=x\sqrt{x}$ от $x_1=0$ до $x_2=5$. Ответ: $\frac{335}{27}$

6. $y=x^2-1$ от $x_1=0$ до $x_2=1$. Ответ: $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$

7. $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$ от $x_1=0$ до $x_2=a$. Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

8. $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$ от $x_1=0$ до $x_2=a$. Ответ: $a\operatorname{sh}1$

9. $y=\ln\cos x$ от $x_1=0$ до $x_2=\frac{\pi}{6}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln 3$

10. $y=\ln\sin x$ от $x_1=\frac{\pi}{3}$ до $x_2=\frac{2\pi}{3}$. Ответ: $\ln 3$

11. $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ от $x_1=1$ до $x_2=e$. Ответ: $\frac{1}{4}(e^2+1)$

12. $y=\frac{1}{2}x^2$ от $x_1=0$ до $x_2=1$. Ответ: $\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

13. $y=\frac{1}{2}x^2$ от $x_1=0$ до $x_2=\sqrt{3}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left[2\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$

14. $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ от $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$ Ответ: $\frac{3\pi}{16}$

15. $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi$ Ответ: $\frac{\pi^2}{2}$

16. $r=1+cos\varphi$ Ответ: 8

4.Теоретические вопросы

1. Каким интегралом выражается площадь обобщенной криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$?.
2. Запишите формулу для вычисления объема тела, получаемого вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox. Объясните смысл величин, входящих в формулу. Изобразите на чертеже вращаемую фигуру и тело вращения
3. Запишите формулу для вычисления объема тела с известной переменной площадью поперечного сечения. Объясните смысл величин, входящих в формулу, выполнив чертеж
4. Запишите формулу для вычисления длины дуги линии в декартовых координатах. Объясните смысл величин, входящих в формулу, сделав чертеж.
5. Запишите формулу для вычисления длины дуги линии, заданной параметрически. Объясните смысл величин, входящих в формулу. Сделайте чертеж.
6. Запишите формулу для вычисления длины дуги линии в полярных координатах. Объясните смысл величин, входящих в формулу. Сделайте чертеж
7. Используя полярное уравнение окружности $r = R$ радиуса R и формулу для площади криволинейного сектора в полярных координатах, получите школьную формулу для площади круга, считая его криволинейным сектором с углом раствора 2π.
8. Используя полярное уравнение окружности $r = R$ радиуса R и формулу для длины дуги в полярных координатах, получите школьную формулу для длины окружности
9. Используя формулу для объема тела вращения фигуры вокруг оси Ox, получите школьную формулу для объёма шара. Рассмотрите вращение верхнего полукруга $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг его диаметра.
10. Выразите интегралом длину дуги параболы $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 1$. Вычислять интеграл не нужно.
11. Выразите интегралом длину эллипса, заданного параметрическими уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. (Соответствующий неопределенный интеграл находить не нужно; он – неберущийся).
12. Выразите интегралом площадь поверхности вращения эллипса, заданного параметрическими уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, вокруг оси Ox.(Вычислять интеграл не нужно).

13. Обобщенная криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$, $(0 \le y_1(x) \le y_2(x), a \le x \le b)$ вращается вокруг оси Ox. Выразите интегралом объем полученного тела вращения.
14. Выразите интегралом площадь обобщенного криволинейного сектора, ограниченного линиями $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2$, $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi))$, заданными в полярных координатах.
15. Выразите интегралом длину дуги параболы $y = \sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$. Вычислять интеграл не нужно.