

Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

1. Основные формулы

1°. Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$$

путем дополнения квадратного трехчлена до полного квадрата этот интеграл сводится к одному из двух табличных интегралов:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C; \quad (1)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C; \quad (2)$$

где

$$u = x + k.$$

2°. Интеграл

$$\int \frac{mx + n}{px^2 + qx + r} dx \quad (3)$$

сводится либо к интегралам (1) – (2), либо к интегралу

$$\int \frac{udu}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2 \pm a^2)}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln |u^2 \pm a^2| + C. \quad (4)$$

3°. Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$

Сводится к одному из табличных интегралов

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C; \quad (5)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C; \quad (6)$$

4°. Интеграл

$$\int \sqrt{px^2 + qx + r} dx \quad (7)$$

Сводится к одному из табличных интегралов:

$$\int \sqrt{u^2 + \alpha} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + \alpha}| + C; \quad (8)$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C; \quad (9)$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{px^2+qx+r}} \quad (10)$$

С помощью обратной подстановки $\frac{1}{mx+n} = t$ эти интегралы сводятся к интегралам вида (3)

2. Образцы задач с решениями

Найти интегралы:

$$1. \int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + C;$$

$$2. \int \frac{dx}{3x^2+4x+1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x+\frac{2}{3})}{(x+\frac{2}{3})^2 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3}} \ln \left| \frac{(x+\frac{2}{3}) - \frac{1}{3}}{(x+\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3x+1}{3x+3} \right| + C;$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x-1 + \sqrt{x^2-2x+3} \right| + C;$$

$$4. \int \sqrt{x^2+8x+25} dx = \int \sqrt{(x+4)^2+9} d(9x+4) = \\ = \frac{x+4}{2} \sqrt{(x+4)^2+9} + \frac{9}{2} \ln \left| (x+4) + \sqrt{(x+4)^2+9} \right| + C = \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C.$$

$$5. \int \sqrt{8+2x-x^2} dx = \int \sqrt{-(x^2-2x+1)+9} dx = \int \sqrt{3^2-(x-1)^2} d(x-1) = \\ = \frac{x-1}{2} \sqrt{3^2-(x-1)^2} + \frac{3^2}{2} \arcsin \frac{x-1}{3} + C = \frac{x-1}{2} \sqrt{8+2x-x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x-1}{3} + C;$$

$$6. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \\ = \sqrt{x^2+2x+2} + 2 \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C;$$

$$7. I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} \quad \text{Сделаем подстановку: } x+1 = \frac{1}{t} \text{ и } dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } I &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t-t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

3. Задачи

Вычислить следующие интегралы:

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} \quad \text{ОТВЕТ: } \ln(3+\sqrt{10}) - \ln(2+\sqrt{5})$$

$$2. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}} \quad \text{ОТВЕТ: } \pi/2$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} \quad \text{ОТВЕТ: } \pi/2$$

$$4. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} \quad \text{ОТВЕТ: } \pi/6$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} \quad \text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$$

$$6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} \quad \text{ОТВЕТ: } \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

$$7. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}} \quad \text{ОТВЕТ: } \ln(2+\sqrt{13}) - \ln 3$$

$$8. \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}} \quad \text{ОТВЕТ: } \ln(3+\sqrt{10})$$

$$9. \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} \quad \text{ОТВЕТ: } \pi/6$$

$$10. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \quad \text{ОТВЕТ: } \pi/6$$