Интегрирование по частям

1.Основные определения и формулы

Формулой *интегрирования по частям* называется формула

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где u и v - дифференцируемые функции от x.

Для применения этой формулы подинтегральное выраже-ние следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции т.е $f(x)dx = u(x)dv(x)$.

Если под интегралом стоит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на алгебраическую, то за $u(x)$ обычно принимают **не алгебраическую** функцию.

Если же под интегралом стоит произведение тригономе-трической или показательной функции на алгебраическую, то за $u(x)$ обычно принимают **алгебраическую** функцию $u(x)$.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к одной из формул таблицы простейших интегралов формула интегрирования по частям применяется несколько раз. Иногда искомый интеграл определяется из алгебраического уравнения, получающегося с помощью этого метода.

Рассмотрим ряд конкретных примеров, иллюстрирующих эти ситуации.

2. Образцы задач с решениями

1. $\int \ln x dx = (\ln x)x - \int x(\frac{1}{x}dx) = x\ln x - x + C;$

2. $I = \int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{1}{b}\int e^{ax}(d\cos bx) = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int \cos bx e^{ax} dx =$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}\int e^{ax}(d\sin bx) = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx dx;$$

Нетрудно видеть, что в результате двойного применения формулы интегрирования по частям мы вернулись к исходному интегралу. Таким образом, имеем:

$(1+\frac{a^2}{b^2})I = (\frac{a}{b^2}\sin bx - \frac{1}{b^2}\cos bx)e^{ax}$. Откуда находим окончательно:

$$I(a,b) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C;$$

Особую важность представляет собой то обстоятельство, что интеграл вычислен в **общем виде** для любых значений **параметров** a и b;

3. $\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}\int \ln x (dx^4) = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^4 (\frac{1}{x}dx) = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C;$

4. $\int (x^2 - 2x + 3)e^{-x}dx = = -\int (x^2 - 2x + 3)de^{-x} = -(x^2 - 2x + 3)e^{-x} + \int e^{-x}(2x - 2)dx =$

$= -(x^2 - 2x + 3)e^{-x} - 2\int (x - 1)de^{-x} = -(x^2 - 2x + 3)e^{-x} - 2(x - 1)e^{-x} + 2\int e^{-x}dx =$

$= -e^{-x}(x^2 - 1) + C;$

5. $I = \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I$. Отсюда:

$I = \frac{x}{2}\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + C.$

6. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{xd\sin x}{\sin^2 x} = -\int xd\frac{1}{\sin x} = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{x}{\sin x} + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

7. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) =$

$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

8. $\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x 2\ln x\frac{1}{x}dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

9. $\int x^2 \sin x dx = -\int x^2 d\cos x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2\int xd\sin x =$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2cosx + C$

10. $I_n = \int x^p \ln^n x dx = \frac{1}{p+1}\int \ln^n x dx^{p+1} = \frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln^n x - \frac{1}{p+1}\int x^{p+1}\frac{1}{x}\ln^n x dx =$

$I_n = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{n}{p+1}I_{n-1}.$

Приравнивая левую и правую части равенства, получим отсюда так называемое *рекуррентное соотношение:*

$$I_n = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{n}{p+1}I_{n-1}.$$

Подставляя в него последовательно значения n=1, n=2, n=3 и т.д., мы получим значения интеграла для $\forall n \in N$.

3.Задачи

1. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$. Ответ: 1.

2. $\int_0^{\pi/2} x\sin x\, dx$ Ответ: 1.

3. $\int_0^{\pi/2} x\cos 2x\,dx$ Ответ: $-\frac{1}{2}$.

4. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$ Ответ: $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

5. $\int_0^1 \arcsin x\,dx$ Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$.

6. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$ Ответ: $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$.

7. $\int_1^2 x\ln x\,dx$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}$.

8. $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$ Ответ: $1/4$.

9. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ Ответ: $2\left(2-\sqrt{e}\right)$.

10. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$.