Интегрирование тригонометрических выражений

1^0. Общий случай $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Подстановка : $tg\frac{x}{2} = z$

Отсюда :

$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}.;$ $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.;$ $dx = \frac{2dz}{1+z^2}.;$

Универсальная подстановка, как правило, приводит к очень громоздким выкладкам. Рассмотрим частные случаям вида функции .

2^0 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ подстановка: $\cos x = t$ (1)

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ подстановка: $\sin x = t$ (2)

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ подстановка: $tgx = t$ (3)

$\int \sin ax \sin bxdx$

3^0. $\int \sin ax \cos bxdx$

$\int \cos ax \cos bxdx$

Необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму или разность, пользуясь одной из следующих формул:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + cos(a-b)x\right]$$

4^0. $\int \sin^m x \cos^n xdx$, где m и n - целые числа.

Если m - нечетное положительное, - подстановка $\cos x = t$.

Если n - нечетное положительное, - подстановка $\sin x = t$.

Если $m+n$ - четное отрицательное, - подстановка $tgx = t$

Если m и n - четные неотрицательные, то применяют формулы;

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);$$

5^0. $\int \sin^p x \cos^q x dx$ $\quad ctgx = t \ (0 < x < \frac{\pi}{2})$, $\quad p$ и q - рациональные числа.

Подстановкой $\sin x = t$ этот интеграл приводится к интегралу от дифференциального бинома Чебышева

$$\int \sin^p x \cos^q x dx = \int t^p (1-t^2)^{q-1} dt .$$

Иногда при решении задач оказываются полезными очевидные тригонометрические соотношения:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x; \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x; \qquad \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin(x \pm \frac{\pi}{4});$$

6^0. $\int tg^n x dx$ и $\int ctg^n x dx$ вычисляются соответственно подстановками: $tgx = t$ и $ctgx = t$.

Задачи с решениями

Найти интеграл:

1. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int (1-\sin^2 x) \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C;$

2. $\int \cos^5 x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d \sin x = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C;$

3. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1-\cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x =$

$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C;$

4. $\int \cos 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C;$

5. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$

Применим подстановку $tg \frac{x}{2} = t$.

Получим $\int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{2tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C;$

6 $\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 9 \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{5 + 9 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{dtgx}{5 + 9tg^2 x} = \frac{1}{3\sqrt{5}} arctg \frac{3tgx}{\sqrt{5}} + C;$

$$7.\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx=-\int\frac{(1-\cos^2 x)}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}d\cos x=3\sqrt[3]{\cos x}(\frac{1}{7}\cos^2 x-1)+C;$$

$$8.\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int tg^2x(1+tg^2x)dtgx=\frac{tg^3x}{3}+\frac{tg^5x}{5}+C;$$

$$9.\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x}dx=\int(\frac{1}{\sin^2 x}-2+\sin^2 x)dx=-(ctgx+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3x}{2})+C;$$

$$10.\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11}x\cos x}}=\int\frac{dx}{\cos^4 x\sqrt[3]{tg^{11}x}}=\int\frac{(1+tg^2x)}{\sqrt[3]{tg^{11}x}}dtgx=-\frac{3(1+4tg^2x)}{8tg^2x\sqrt[3]{tg^2x}}+C;$$

$$11.\int tg^7xdx=\int t^7\frac{dt}{1+t^2}=\int(t^5-t^3+t-\frac{t}{1+t^2})dt=$$

$$=\frac{1}{6}tg^6x-\frac{1}{4}tg^4x+\frac{1}{2}tg^2x+\ln|\cos x|+C;$$

$$12.\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

Так как при изменении знаков у $\sin x$ и $\cos x$ подинтегральное выражение не меняет знака, применим подстановку $tgx=t$, что приводит к интегралу от рациональной дроби

$$\int\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{t-1}{(t^2+1)}dt+\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C;$$

$$13.\int\frac{1}{\cos^4 x\sin^2 x}dx=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\cos^4 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx+2\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=\int tg^2xdtgx+2tgx-ctgx+C=\frac{1}{3}tg^3x+2tgx-ctgx+C;$$

Задачи

Вычислить:

1. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2x\cos^2x\,dx$. Ответ: $\frac{\pi}{16}$.

2. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx$. Ответ: $\frac{3\pi}{16}$.

3. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx$. Ответ: $\frac{3\pi}{16}$.

4. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos 5x\,dx$. Ответ: 0.

5. $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^3 x\,dx$. Ответ: $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

6. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$. Ответ: $2/3$.

7. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$. Ответ: 1.

8. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$. Ответ: $2/3$.

9. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$. Ответ: $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

10. $\int\limits_0^{1} \cos^2 \frac{\pi x}{4}\,dx$. Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

11. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\sin x\,dx$. Ответ: $4/3$.

12. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{ctg}^3 x\,dx$. Ответ: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$.

13. $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$.

14. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$. Ответ: $\ln\left|1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

15. $\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}$. Ответ: $-\ln\left|1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

16. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{3}}+C$.

17. $\int \frac{dx}{3+\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}{2}+C$.

18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+5\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{5}}+C$.

19. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Ответ: $\mathrm{tg}\,x+\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+C$.

20. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. Ответ: $-\mathrm{ctg}\,x-\frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3}+C$.

Теоретические вопросы

1. Какая функция называется первообразной по отношению к заданной функции $f(x)$ на заданном промежутке?

2. Чем отличаются две первообразные функции для одной и той же функции на одном и том же промежутке?

3. Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$ на промежутке $(a;b)$. Напишите выражение для всех первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке.

4. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.

5. В чем состоит свойство линейности для неопределенного интеграла?

6. Сформулируйте свойство инвариантности формы записи для неопределенного интеграла.

7. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

8. Какую подстановку нужно выполнить для рационализации интеграла $\int R\left(\sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}\right) dx$?

9. Укажите универсальную подстановку для рационализации интеграла $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Как при этом преобразуются $\sin x$, $\cos x$, dx?

10. Укажите рационализирующую подстановку для интеграла $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$.

11. Какой интеграл называется неберущимся?

12. Сформулируйте достаточное условие существования первообразной.

13. Чему равен $\int dF(x)$?

14. Как проверить истинность формулы $\int f(x)\, dx = F(x)+C$?

15. Чему равна производная неопределенного интеграла?

16. Чему равен дифференциал неопределенного интеграла?

17. Чему равен $\int F'(x) dx$?

18. Укажите метод отыскания интеграла $\int (\cos x)^{2n+1} dx$, где n-натуральное число. Рассмотрите пример $\int (\cos x)^{3} dx$.

19. Укажите метод отыскания интеграла $\int (\cos x)^{2n} dx$, где n-натуральное число. Рассмотрите пример

20. Покажите, что функции $F_1(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x; F_2(x) = \sin^2 x$ являются первообразными одной и той же функции на числовой оси

21. $\int \sin mx \cos nx dx = ?$

22. $\int \cos mx \cos nx dx = ?$

23. $\int \sin mx \sin nx dx = ?$

24. Обоснуйте формулу для табличного интеграла $\int x^n dx; (n \neq -1.)$.

25. Обоснуйте формулу для табличного интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

26. Обоснуйте формулу для табличного интеграла $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

27. Обоснуйте формулу для интеграла $\int \operatorname{ctg} x \, dx$.

28. Обоснуйте формулу для интеграла $\int \frac{dx}{\sin x}$.

29. Обоснуйте формулу для интеграла $\int \frac{dx}{\sin x}$.

30. Обоснуйте формулу для табличного интеграла $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$.

31. Обоснуйте формулу для интеграла $\int tgxdx$.

32. Найдите $\int thxdx.$

33. Найдите $\int cthxdx.$

34. Обоснуйте формулу для табличного интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}.$

35. Возьмите неопределенные интегралы от простейших рациональных дробей первых двух видов.

36. Почему неопределенный интеграл от рациональной функции является берущимся?

37. Возьмите интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}; \left(q - \frac{p^2}{4} > 0 \right)$, сведя его к табличному

38. Возьмите интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}; \left(q - \frac{p^2}{4} < 0 \right)$, сведя его к табличному.

39. Возьмите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + px + q}}; \left(\frac{p^2}{4} + q > 0 \right)$, сведя его к табличному.

40. Возьмите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$, сведя его к табличному.

41. Вычислите с помощью интегрирования по частям $\int x \sin axdx$.

42. Вычислите с помощью интегрирования по частям $\int xe^{ax} dx$.

43. Вычислите с помощью интегрирования по частям $\int x \cos axdx.$