Комплексные числа. Многочлены.

Комплексные числа.

1. Основные определения и формулы для решения задач

Комплексным числом z в *алгебраической* форме называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y - действительные числа, $x = Rez$ - *реальная* часть комплексного числа, а $y = \mathrm{Im}z$ - *мнимая* часть комплексного числа. Число $\bar{z} = x - iy$ называется *комплексно-сопряженным* числу z.

Для двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ по определению имеет место:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = y_2; \tag{1}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \qquad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2); \tag{2}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1); \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}; \tag{4}$$

$$z = (x + iy)^n = x^n + nx^{n-1}iy + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(iy)^2 + \ldots + (iy)^n; \tag{5}$$

В *тригонометрической* форме комплексного числа полагают

$$x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi \quad \text{и} \quad z = r(\cos\varphi + isn\varphi), \tag{6}$$

где $r = \mathrm{mod}\, z = |z|$ и $\varphi = Argz$ называют соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа. Значение $\varphi = \arg z$, где $-\pi\angle\varphi \le \pi.$ - *главное* значение аргумента, следовательно, все значения аргумента суть $Argz = \varphi + 2k\pi$; Из обозначений очевидно, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и для аргумента φ находим:

$$\varphi = \begin{cases} arctg\left\lfloor \dfrac{y}{x} \right\rfloor, & \text{если } x \in \text{I четверти} \\ \pi - arctg\left\lfloor \dfrac{y}{x} \right\rfloor, & \text{если } x \in \text{II четверти} \\ \pi + arctg\left\lfloor \dfrac{y}{x} \right\rfloor, & \text{если } x \in \text{III четверти} \end{cases} \tag{7}$$

$$-arctg\left|\frac{y}{x}\right|, \qquad \text{если} \quad x \in \text{IY} \text{ четверти.}$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]; \tag{8}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]; \tag{9}$$

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \tag{10}$$

Из *формулы Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{11}$$

следует *формула Муавра*:

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \tag{12}$$

а также – *показательная* форма комплексного числа

$$z = re^{i\varphi} \tag{13}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi\ -\varphi_2)}\ , \quad z^n = r^n e^{in\varphi}; \tag{14}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad \text{где} \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1) \tag{15}$$

2. Образцы задач с решениями

1. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел:

$z_1 = (5+2i)$ и $z_2 = 3-4i$.

Решение. По формулам (2) - (4) соответственно находим:

$$z_1 + z_2 = (5+2i) + (3-4i) = (5-3) + (2-4)i = 8-2i;$$

$$z_1 - z_2 = (5+2i) - (3-4i) = (5-3) + \left[2-(-4)\right]i = 2+6i;$$

$$z_1 z_{2(} = (5+2i)(3-4i) = \left[5\cdot 3 - 2(-4)\right] + \left[5(-4) + 2\cdot 3\right]i = 23-14i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+2i}{3-4i} = \frac{(5+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{(15-8)+(20+6)i}{9+16} = \frac{7}{25} + \frac{26}{25}i;$$

2. Представить число z в тригонометрической и показательной форме если $z = 3 - 3i$

Решение. Реальная часть $x = 3$, а мнимая y=-3. По формулам $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. и, следовательно $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Ответ: z = $3 - 3i = 3\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right] = 3\sqrt{2}e^{=i\frac{\pi}{4}}$.

3. Произвести указанные действия $\frac{1+i}{1-i} + 2i^{10}$.

Решение. $\frac{1+i}{1-i} - 2i^{13} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} - 2i^{12} \cdot i = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} - 2i = \frac{2i}{2} - 2i = -i$

4. Вычислить i^4; i^{25}.

Решение. $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$; $i^{25} = (i^4)^6 \cdot i = i.$

5. Представить в gjrfpfntkmyjq форме число $z = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$.

Решение. Данное комплексное число не отвечает тригонометрической форме записи, так как реальная и мнимая части числа соединяются знаком минус, а не плюс. Комплексное число изображается точкой в четвертом квадранте, в котором аргументом данного числа является угол $\left(-\frac{\pi}{8}\right)$. Модуль равен 1.

Тогда $z = \cos(-\frac{\pi}{8}) + i\sin(-\frac{\pi}{8})$. Ответ: $z = \cos(-\frac{\pi}{8}) + i\sin(-\frac{\pi}{8})$.

6. Представить в тригонометрической форме число $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$,

если $\pi \le \alpha \angle 2\pi$.

Решение. $r = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2 + 2\cos\alpha} = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = -2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot$

$$\cos\varphi = \frac{1+\cos\alpha}{-2\cos\frac{\alpha}{2}} = -\cos\frac{\alpha}{2} = \cos(\frac{\alpha}{2} - \pi);$$

$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{-2\cos\frac{\alpha}{2}} = -\sin\frac{\alpha}{2} = \sin(\frac{\alpha}{2} - \pi).$ Таким образом: $\varphi = \frac{\alpha}{2} - \pi.$

Ответ: $1+\cos\alpha+i\sin\alpha=-2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i(\frac{\alpha}{2}-\pi)}$.

3. Задачи

Найти реальную часть $\operatorname{Re} z$ комплексного числа

1. $z=\frac{(2-i)^3}{(1+i)^2}$: Ответ: $-11/2$:

2. $z=\frac{(1-i)^4}{2+i}$: Ответ: $-8/5$:

3. $z=\frac{(2+3i)^2}{1-2i}$ Ответ: $-29/5$:

4. $z=\frac{(1+2i)^2}{3-i}$: Ответ:: $-13/10$:

Найти мнимую часть комплексного числа Imz, если:

11. $z=\frac{(1-i)^2}{2+i}$: Ответ: $-4/5$:

12. $z=\frac{(2+i)^3}{(1-i)^2}$: Ответ: 1:

13. $z=\frac{(1+i)^2}{2-i}$: Ответ: $4/5$:

14. $z=\frac{(2-i)^2}{2+i}$: Ответ: $-11/5$:

Запишите комплексное число z в тригонометрической форме, если:

21. $z=-1+i$; Ответ: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

22. $z=1-i\sqrt{3}$ Ответ: $z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$:

23. $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ Ответ: $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$:

24. $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$: Ответ: $z=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$:

Запишите комплексное число z в показательной форме, если:

27. $z=-1-i\sqrt{3}$: Ответ: $z=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$:

28. $z=1+i\sqrt{3}$: Ответ: $z=2e^{\frac{i\pi}{3}}$:

29. $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$: Ответ: $2e^{-\frac{i\pi}{4}}$:

29. $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$: Ответ: $2e^{-\frac{i\pi}{4}}$:

Запишите в алгебраической форме комплексное число

36. $z = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ Ответ: $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$:

37. $z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ Ответ: $z = -1 - i\sqrt{3}$:

Различные задачи

41. Вычислите $(1+i)^4$. Ответ: - 4:

42. Вычислите $(1+i)^2/(1-i)$. Ответ: $i-1$

43. Вычислите $(3-5i)/(1+i)$. Ответ: $-1-4i$

44. Вычислите $\sqrt{1+i}$ с наименьшим аргументом из промежутка $[0, 2\pi)$.

Ответ: $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$:

45. Укажите $\arg(1-i)$ из промежутка $(-\pi;\pi]$. Ответ: $-\pi/4$:

46. Вычислите $|z|$, если $z = (1+2i)/(1+i)$. Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$;

47. Укажите значение $\sqrt[3]{i}$ с наименьшим аргументом из промежутка $[0, 2\pi)$.
Ответ: $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

48. Решите уравнение $z^2 + 4z + 13 = 0$. Ответ: $-2 \pm 3i$

49. Запишите в тригонометрической форме число $2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ответ:
$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

50. Запишите в алгебраической форме число $3e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ответ: $3/2 + i3\sqrt{3}/2$

4. Теоретические вопросы.

1. Что происходит с модулями и аргументами комплексных чисел при их перемножении?
2. Что происходит с модулями и аргументами комплексных чисел при их делении?
3. Что такое модуль комплексного числа? Как он выражается через вещественную и мнимую части числа?

4. Запишите условия равенства двух комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.
5. В чем состоит векторная интерпретация комплексного числа?
6. Какие числа называются комплексно-сопряженными? Изобразите их на комплексной плоскости.
7. Запишите условия равенства двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.
8. С помощью формулы Эйлера, выразите $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ через показательные функции.
9. Запишите тригонометрическую форму комплексного числа. Объясните смысл величин r, φ, в неё входящих.
10. Запишите показательную форму комплексного числа. Объясните смысл величин r, φ, в неё входящих.
11. Что такое главное значение аргумента комплексного числа? Укажите все возможные значения аргумента комплексного числа, если главное значение равно α.
12. Как располагаются корни уравнения $z^n = c\left(c \neq 0; n \geq 3\right)$ на комплексной плоскости?
13. Что такое аргумент комплексного числа $z = x + iy$? Как найти тангенс аргумента, зная x и y?